

**НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ імені ІГОРЯ
СІКОРСЬКОГО»**

Факультет електроніки

(повна назва інституту/факультету)

Акустики та акустoeлектроніки

(повна назва кафедри)

«До захисту допущено»

Завідувач кафедри

Дідковський В.С.

(підпис)

(ініціали, прізвище)

“ ” 20__ р.

Дипломна робота

на здобуття ступеня бакалавра

зі спеціальності (спеціалізації) 6.050803 Акустотехніка

(код та назва спеціальності)

на тему: Дослідження ядерного оцінювання щільності імовірності
акустичних сигналів

Виконав: студент 4 курсу, групи ДГ-51

(шифр групи)

Коломієць Антон Ігорович

(прізвище, ім'я, по батькові)

(підпис)

Керівник доцент каф. ААЕ, к.т.н., доцент Берегун В.С.

(посада, науковий ступінь, вчене звання, прізвище та ініціали)

(підпис)

Консультант

(назва розділу)

(посада, вчене звання, науковий ступінь, прізвище, ініціали)

(підпис)

Рецензент

(посада, науковий ступінь, вчене звання, науковий ступінь, прізвище та ініціали)

(підпис)

Засвідчую, що у цій дипломній роботі
немає запозичень з праць інших авторів
без відповідних посилань.

Студент

(підпис)

Київ – 2019 року

**Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»**

Інститут/факультет _____ електроніки _____
(повна назва)

Кафедра _____ акустики та акустoeлектроніки _____
(повна назва)

Рівень вищої освіти – перший (бакалаврський)

Спеціальність (спеціалізація) _____ 6.050803 Акустотехніка _____
(код і назва)

ЗАТВЕРДЖУЮ
Завідувач кафедри

_____ Дідковський В.С. _____
(підпис) (ініціали, прізвище)

« ____ » _____ 20__ р.

**ЗАВДАННЯ
на дипломний проект (роботу) студенту**

_____ Коломійцю Антону Ігоровичу _____
(прізвище, ім'я, по батькові)

1. Тема проекту (роботи) Дослідження ядерного оцінювання щільності імовірності акустичних сигналів

Керівник проекту (роботи) _____ Берегун В.С., к.т.н. доцент _____,
(прізвище, ім'я, по батькові, науковий ступінь, вчене звання)

затверджені наказом по університету від «27» травня 2019 р. №1405-с

2. Строк подання студентом проекту (роботи) _____

3. Вихідні дані до проекту (роботи) Неперервні закони розподілу акустичних сигналів – нормальний, Стюдента, Лапласа

4. Зміст (дипломної роботи) пояснювальної записки (перелік завдань, які потрібно розробити) _____

1. Аналіз характеристик акустичних сигналів та їх моделей

2. Збір матеріалів по методах знаходження щільності імовірності

3. Комп'ютерне моделювання реалізацій сигналів та знаходження їх щільності імовірності

4. Аналіз отриманих даних

5. Висновки

6. Консультанти розділів проекту (роботи)*

| Розділ | Прізвище, ініціали та посада консультанта | Підпис, дата | |
|--------|-------------------------------------------|----------------|------------------|
| | | завдання видав | завдання прийняв |
| | | | |
| | | | |

7. Дата видачі завдання 10.09.2018

Календарний план

| № з/п | Назва етапів виконання дипломного проекту (роботи) | Строк виконання етапів проекту (роботи) | Примітка |
|-------|---------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------|----------|
| 1 | Збір матеріалів для роботи. Аналіз науково-технічної літератури. | 15.09.2018– 20.11.2018 | |
| 2 | Отримання теоретичних даних по роботі. | 15.12.2018– 10.02.2019 | |
| 3 | Експериментальні дослідження. | 20.02.2019– 10.03.2019 | |
| 4 | Висновки по роботі | 23.04.2019– 30.04.2019 | |
| 5 | Оформлення пояснювальної записки та презентації. | 02.06.2019– 10.06.2019 | |

Студент

(підпис)

А.І. Коломієць
(ініціали, прізвище)

Керівник роботи

(підпис)

В.С. Берегун

*Консультантом не може бути зазначено керівника дипломного проекту (роботи)

РЕФЕРАТ

Дослідження ядерного оцінювання щільності імовірності акустичних сигналів // Дипломна робота на здобуття ступеня вищої освіти «бакалавр». Коломієць А.І. Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського», факультет електроніки, кафедра акустики та акустoeлектроніки, група ДГ-51. – К.: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2019. с. –70, рис. – 58, табл. – 9.

Метою роботи є дослідження і аналіз ядерного оцінювання щільності імовірності акустичних сигналів.

У роботі приведені основні відомості з теорії імовірності про випадкові величини та їх імовірнісні характеристики. Щільність імовірності дозволяє вирішувати задачі вимірювання випадкових процесів, здійснювати класифікацію сигналів, досліджувати функціональні перетворення та ін.

Під час виконання було проведено ядерне оцінювання щільності імовірності згенерованих акустичних сигналів, використовуючи такі закони розподілу: нормальний закон розподілу, закон розподілу Стюдента, закон розподілу Лапласа.

Порівняв результати теоретичних розрахунків з експериментальними, отримані наступні результати: експериментальні значення максимально наближаються до теоретичних зі збільшенням об'єму вибірок.

Ключові слова: акустичні сигнали, щільність імовірності, закон розподілу, ядерне оцінювання.

ABSTRACT

Research of kernel estimation of probability density function of acoustic signals//Thesis for a degree of higher education "Bachelor". Kolomiets A. National Technical University of Ukraine "Kiev Polytechnic Institute named by Igor Sikorsky, Faculty of Electronics, Department of acoustics and acoustoelectronics, group DG-51. - K: NTUU "KPI", 2019. p. - 70, fig. - 58, tab.-9.

The purpose of the work is the research and analyzing of kernel estimation of probability density function of acoustic signals.

In the work presents the main statements from the theory of probability about random values and their probability characteristics. Probability density allow solving measurement tasks of random process, making classification of signals, to researching functional transformation, etc.

During implementation was conducted the kernel estimation of probability density function of generated acoustic signals, we using distributions: normal distribution, Student's distribution and Laplace distribution.

Comparing the results of theoretical measurement with experimental measurements we got results: experimental measurements maximal nearest to theoretical when we increase the number of samples.

Keywords: acoustic signals, probability density function, distribution act, kernel estimation.

Зміст

| | |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Вступ..... | 8 |
| Розділ 1. ХАРАКТЕРИСТИКИ ТА МОДЕЛІ АКУСТИЧНИХ СИГНАЛІВ | 9 |
| 1.1. Акустичні сигнали та їх характеристика..... | 9 |
| 1.2. Моделі шумових акустичних сигналів | 18 |
| Висновки до першого розділу..... | 24 |
| Розділ 2. ОЦІНЮВАННЯ ЗАКОНІВ РОЗПОДІЛУ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН І ПРОЦЕСІВ | 25 |
| 2.1. Закони розподілу випадкових процесів | 25 |
| 2.2. НАБЛИЖЕНІ МЕТОДИ ЗНАХОДЖЕННЯ ЩІЛЬНОСТІ ІМОВІРНОСТІ АКУСТИЧНИХ СИГНАЛІВ..... | 27 |
| 2.3 Система розподілів Пірсона..... | 29 |
| 2.4. Апроксимація сумішшю розподілів..... | 33 |
| 2.5. Апроксимація відрізком ортогональних ядів..... | 41 |
| 2.6. Гістограма..... | 45 |
| 2.7. Ядерна оцінка щільності імовірності..... | 46 |
| Висновки до другого розділу..... | 49 |
| Розділ 3. ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНІ ДОСЛІДЖЕННЯ ЯДЕРНОЇ ОЦІНКИ ЩІЛЬНОСТІ ІМОВІРНОСТІ І ПОРІВНЯННЯ З ТЕОРЕТИЧНИМИ ДАНИМИ..... | 53 |
| 3.1. Ядерна оцінка щільності імовірності за нормальним законом розподілу..... | 54 |
| 3.2. Ядерна оцінка щільності імовірності за законом розподілу Стюдента..... | 57 |
| 3.3. Ядерна оцінка щільності імовірності за законом розподілу Лапласа..... | 67 |

| | |
|-----------------------------------|----|
| Висновки до третього розділу..... | 71 |
| Висновки по роботі..... | 71 |
| Література..... | 73 |

Вступ

Існує велика кількість акустичних сигналів, які є випадковими процесами. До акустичних сигналів відносяться флуктуації температури і тиску, шуми кавітації, аеродинамічні і гідродинамічні шуми у потоках газу і рідини, магнітні шуми, віброакустичні шуми підшипників, сигнали акустичної емісії та ін.

Аналіз моделей цих сигналів показав, що щільність імовірності можна знайти лише в окремих випадках. Тому використовуються наближені методи знаходження щільності імовірності, використовуючи різні закони розподілу.

В даний час більшість задача теорії і практики шумової діагностики базуються на гауссівській моделі шумових сигналів і тому вирішені у рамках кореляційно-спектральної теорії. Аналіз багатьох теоретичних і експериментальних досліджень показав, що більшість шумових сигналів являються негауссівськими випадковими процесами. Це обмежує інформативність і застосовність кореляційно-спектральних характеристик.

Для діагностики виникає необхідність застосування негауссівських моделей шумових сигналів. Модель повинна відображати значні сторони досліджуваних фізичних процесів; необхідний добре розроблений апарат дослідження моделі шумового сигналу.

В даній роботі ми досліджуємо щільність імовірності згенерованих акустичних сигналів за допомогою ядерного оцінювання. Використовуються закони розподілу:

- нормальний закон розподілу;
- закон розподілу Стюдента;
- закон розподілу Лапласа.

РОЗДІЛ 1. Характеристика та моделі акустичних сигналів

1.1. Акустичні сигнали та їх характеристика

Сигнали акустичної емісії [1–4]. Процес акустичної емісії виконується в твердих тілах у результаті динамічної перебудови структури матеріалу на мікроскопічному або макроскопічному рівні під дією навантажень, створюваних технологічним або випробувальним навантаженням. Джерела акустичної емісії генерують акустичне поле, яке називається сигналом акустичної емісії (акустично-емісійним сигналом), параметри якого несуть інформацію о джерелі та об'єкті випробувань.

Основними механізмами генерації акустико-емісійних сигналів в полікристалічних тілах являється рух дислокації, двійкування, бездифузні фазові переходи, виникнення та поширення тріщин. Перші три механізми відносяться до мікроскопічного рівня, зв'язані з процесами мікропластичності і призводять до появи акустично-емісійних сигналів вже в області малих пружних деформацій на навантаженнях, недостатніх для розвитку тріщин.

Утворення і розповсюдження тріщин зв'язано з процесами руйнування матеріалів, являє собою динамічну перебудову структури матеріалу на макроскопічному рівні і відбувається під дією високих внутрішніх навантажень, викликаних скупченням дислокацій. Розвиток тріщин відбувається нерівномірно, її розповсюдження супроводжується деякою пластичною деформацією. Початок розвитку мікротріщин та її розповсюдження призводить до збільшення інтенсивності акустичної емісії.

Виникнення і розвиток тріщин при корозійному розтріскуванні зв'язано з механічними руйнуваннями захисної плівки під дією високих навантажень і вибіркоvim розчиненням дефектних місць на поверхні пружного матеріалу. При цьому стискаючі напруги сприяють погіршенню захисних властивостей плівок, нерідко визиваючи їх розтріскування. Виникаючі мікроскопічні тріщини розповсюджуються вглиб металу зі швидкістю 0,5...5 мм/с. Направлений ріст тріщин можливий, тому що

локальна пластична деформація металу біля вершини розвиваючої тріщини, викликана концентрацією напружень, значно підсилює розчинення металу біля вершини розвиваючої тріщини.

При циклічних навантаженнях змінні напруги міняють кількість джерел, здатних генерувати дислокації, і рухомість останніх, слідуючи, значення і швидкість пластичної деформації. Збільшення навантаження призводить до збільшення числа повзучості матеріалів і зменшенню часу їх руйнування. Руйнування металів під дією змінювання по амплітуді напружень зазвичай називають втомними.

Розрізняють неперервну і дискретну акустичну емісію. *Неперервна акустична емісія* виникає при деформації тіл, і представляє неперервне хвильове поле. Сигнали неперервної акустичної емісії реєструється як неперервний сигнал і являється накладанням великого числа коротких експоненціальних імпульсів з низьким енергетичним рівнем ($10^{-19} \dots 10^{-18}$) Дж. Спектральна щільність сигналів неперервної акустичної емісії практично рівномірна в широкому діапазоні частот (до 30 МГц).

Дискретна емісія виникає при перевищенні границі текучості матеріалу і характеризує початковий етап руйнування. Сигнали дискретної акустичної емісії являє собою хаотичну послідовність коротких окремих чи частково перекриваючих імпульсів високого енергетично рівня ($10^{-16} \dots 10^{-14}$) Дж. В місті виникнення дефекту окремий імпульс акустичної емісії має експоненційну форму, а його тривалість залишає 0,1...10 мкс. Через вплив середовища у місці прийому імпульс приймає експоненційно-степеневий вид, а його тривалість збільшується. На виході електроакустичного перетворювача імпульси мають вид експоненційно затухаючої гармоніки.

Теоретичні і експериментальні дослідження сигналів дискретної акустичної емісії показали, що їх спектральні і кореляційні характеристики відповідають характеристикам випадкових процесів авторегресії першого порядку з шириною спектра до одиниць мегагерц. Моментальні значення

сигналів дискретної акустичної емісії мають гамма-розподіл, а інтенсивність потоку імпульсів має степеневу залежність від часу при лінійному зміненні навантаження, внаслідок чого сигнали дискретної акустичної емісії мають нестационарний характер.

Для побудови моделей акустично-емісійного сигналу на виході електроакустичного перетворювача зробимо наступні припущення.

1. Об'єктом контролю є полікристалічне тіло з однорідного матеріалу простої геометричної форми.
2. Швидкість зміни зовнішнього навантаження $F(t)$ значно менше швидкості звуку в матеріалі об'єкта.
3. Процеси дефектоутворення вважаємо простими у вигляді пластичної деформації, виникненні мікротріщин і стрибкоподібного зростання втомної тріщини.
4. Акустичний тракт середовища має лінійні властивостями, відображення від кордонів об'єкта і трансформація типів хвиль відсутній.
5. Електроакустичний перетворювач здійснює лінійне перетворення і не спотворює поле зсувів поверхні об'єкту.
6. Акустичні та електричні перешкоди відсутні.

При сформульованих припущеннях 1-6 загальна модель акустично-емісійного сигналу на виході електроакустичного перетворювача має такий вигляд:

$$\xi(t) = A_{\text{ЕАП}} \{ A_{\text{СР}} [\xi_{\text{Н}}(t) + \xi_{\text{Д}}(t)] \} = A_{\text{СП}} \{ \xi_{\text{Н}}(t) \} + A_{\text{СП}} \{ \xi_{\text{Д}}(t) \} \quad (1.1)$$

де $\xi_{\text{Н}}(t)$ и $\xi_{\text{Д}}(t)$ - сигнали безперервної і дискретної акустичної емісії відповідно; $A_{\text{ЕАП}}$, $A_{\text{СР}}$ - лінійні оператори, що описують електроакустичний перетворювач і середовище; $A_{\text{СП}}$ - похідна цих операторів, описуюча акустично-емісійний канал джерело акустичної емісії – вихід перетворювача.

Шуми кавітації. [5-8] Явище кавітації пов'язано з наявністю в реальній рідині мікроскопічних зародків іншої фази, парової чи газової, які мають назву зародки або ядра кавітації. Кавітація являє собою процес нестійкого

змінення розмірів парогазових бульбашок при знакозмінному тиску в рідині. Розширення бульбашок виникає при існуванні в рідині розтягуючих чи негативних тисків, а їх стискання – при позитивних тисках, переважаючих рівноважне значення.

При дії на рідину напружень, які розтягуються за рахунок локальних розріджень виникає зріст кавітаційних зародків, які нелінійно пульсують і зхлопуються з утворенням ударних хвиль і кумулятивних струменів. Значення тисків, які розтягуються, при яких можливий розрив рідини і утворення нової фази - парогазової бульбашки, для чистих рідин визначаються силою міжмолекулярних зв'язків. На кавітацію впливають різні фактори – фізичні властивості рідини і її температура, наявність розчинених газів і сторонні частки в рідині, зовнішній тиск та ін.

Зростання кавітаційних бульбашок може відбуватися як внаслідок дифузії розчиненого газу в бульбашці (газова кавітація), так і внаслідок втрати стійкості при швидкому розширенні бульбашки (парова кавітація).

Основною причиною утворення звукових хвиль при газовій кавітації вважаються об'ємні коливання повітряних бульбашок, які здійснюють затухаючі гармонічні коливання на власній частоті ω_0 . При паровій кавітації основною причиною звукоутворення вважається зхлопування кавітаційних бульбашок, у результаті якого виникають імпульси експоненціальної форми тривалістю $10^{-9} \dots 10^{-6}$ с.

Процеси, супроводжуючі газову кавітацію, протікають порівняно повільно, тому випромінюваний шум має малий енергетичний рівень. Парова кавітація характеризується енергетичним зхлопуванням бульбашок, внаслідок чого виникають ударні хвилі великої амплітуди, які являються причиною інтенсивного шуму.

В об'ємі рідини утворюються *кавітаційна область*, яка представляє собою скупчення кавітаційних бульбашок. Задовільна модель кавітаційної

області відсутня, оскільки розподіл бульбашок по розмірах і простору об'єму має складний статистичний характер.

В даний час кавітаційний шум розглядається як результат накладання великого числа хаотичних акустичних імпульсів. У більшій кількості відомих робіт, присвячених вивченню імовірнісних характеристик кавітаційного шуму, автори обмежуються дослідженням його кореляційних і спектральних функцій. Результати досліджень показали, що спектр шуму кавітації являється практично рівномірним до частот декількох мегагерц.

Кавітація являє собою процес нестійкого зміни розмірів парогазових бульбашок при знакозмінному тиску в рідині, які виникають, ростуть, нелінійно пульсують і зхлопуються з утворенням ударних хвиль і кумулятивних струменів. Виникаючі акустичні сигнали витоку є результат накладання великого числа імпульсів, які виникають в випадкові моменти часу.

Випадковий процес (3.1) є стаціонарним, його одномірні кумулянтні функції (кумулянти) не залежать від часу, $\kappa_s \left[\xi(t) \right] = \kappa_s$, і визначаються за формулою :

$$\kappa_s = \kappa_{s\eta} \int_{-\infty}^{\infty} h^s(t) dt \quad (1.2)$$

де $\kappa_{s\eta} = \lambda \alpha_{s\eta}$, $\alpha_{s\eta} = M \left[\eta_k^s \right]$ – s-початкові моменти амплітуд η_k ; $k_1 = m$ – математичне сподівання процесу (3.1), $k_1 = \sigma^2$ – його дисперсія.

Для аналізу акустичних сигналів витоку зручно використовувати безрозмірні кумулянтні коефіцієнти γ_s .

$$\gamma_s = \frac{\kappa_s}{\kappa_s^{s/2}} \quad (1.3)$$

Відмітимо що коефіцієнт γ_3 – коефіцієнт асиметрії, γ_4 – коефіцієнту ексцесу.

Акустичні сигнали витоку [3, 9-11] являються наслідком гідродинамічних процесів, які протікають в течії напірних трубопроводах під дією перепаду тисків. Властивості акустичних сигналів витоку істотно залежать від режимів витікання рідини, котрі визначаються у першу чергу величиною перепаду тисків і геометричними параметрами щілини.

Розрізняють наступні основні режими витікання рідини в повітря – крапельне, суцільного заповнення каналу, кавітаційне, повного відриву потоку від стінок каналу, внутрішньоканального розпаду струменю.

Крапельний витік. Для води при перепаді тисків, рівному 0,75 МПа, і діаметрі щілини менш за 0,04 мм в каналі відсутній рух і, отже, будь-які акустичні сигнали. Рух рідини в течії починається при перепаді тисків, достатньому для подолання поверхневого натягу. При цьому в вихідному перетині утворюються чи окремі краплі рідини, чи окремі бульбашки газів. В цьому режимі можуть виникнути акустичні сигнали імпульсного характеру, є наслідком динамічних ефектів при замиканні і відриву кожної окремої бульбашки чи краплі.

Суцільне заповнення каналу рідиною відбувається при малих перепадах тисків і нормальній температурі. При досягненні швидкості руху рідини в течії значення, відповідне критичному числу Рейнольдса, виникає турбулентна течія в каналі, котре супроводжується акустичними сигналами. Зокрема, турбулентний режим течії має місце при перепаді тисків 1 МПа, товщині стінки трубопроводу 8 мм та діаметрі щілини 0,08 мм.

Кавітаційний режим виникає зі зростанням перепаду тисків. Наприклад, кавітація настає в коротких щілинах (5–10 мм) з діаметром щілини 0,1...1,0 мм при перепадах тисків біля 0,1 МПа. В районі вихідної течії відбувається відрив рідини від стінок каналу і утворення кавітаційних бульбашок – каверн. Кавітаційний режим течії через нестабільність хвостової частин каверни супроводжується сильними акустичними сигналами, на порядок перевищуючих шуми турбулентності.

При наступному зростанні перепадів тисків спостерігається зростання дожини каверни, і її вихід з кінця каналу. С цього моменту настає *режим повного відриву струменю рідини* від стінок течії і руйнування каверн. Акустичні сигнали при цьому мінімальні.

Режим внутрішньоканального розпаду струменю виникає тільки в часткових і при вельми великих перепадах тисків. В цьому режимі струмінь рідини являється нестійким, може виконуватись його викривлення і розпад на окремі краплі (розпилення). Якщо розпад струменю відбувається всередині каналу і траєкторії руху часток нестійкого струменю, чи тих, які відірвались від струменю крапель рідини перетинають стінки каналу, то виникають значні акустичні сигнали, причиною яких являється бомбардування стінок каналу окремими частинками рідини.

Корисні акустичні сигнали (псевдозвук) можуть виникнути також в стінці об'єкта досліджень при невеликих швидкостях витoku за рахунок пульсацій тиску на стінці каналу, обумовлених нестационарністю потоку.

Для акустичного контактного течешукання найбільшу зацікавленість представляють режими суцільного заповнення каналу і кавітаційний. В цих режимах акустичні сигнали, котрі генеруються за рахунок турбулентності і кавітації, мають широкосмуговий неперервний спектр з верхньою частотою до декількох мегагерц. У низькочастотній частині діапазону (до 60 кГц) спектр зареєстрованих при витoku акустичних сигналів може мати локальні максимуми, відповідні власним частотам щілини.

Для вирішення задачі виявлення витоків рідини в трубопроводі в процесі його експлуатації широкі можливості мають методи акустичного контактного течешукання. Акустичний сигнал витoku спотворюється шумами, створюваними рухомим потоком рідини, тому завдання виявлення витоків в трубопроводах зводиться до задачі виявлення шумового сигналу витoku на тлі шумової перешкоди. В даний час рішення цієї задачі базується, як правило, на методах кореляційно-спектрального аналізу, які є вичерпними, якщо вважати, що сигнал і перешкода мають гауссівський розподіл миттєвих

значень. Результати теоретичних і експериментальних досліджень показали, однак, що акустичні сигнали витoku є негауссівськими випадковими процесами, тому для їх виявлення поряд з кореляційно-спектральними методами доцільно застосовувати методи, засновані на імовірнісному аналізі негауссівських процесів.

Якщо в деякій точці x_0 труби виникла течія, то в результаті перепаду тисків з труби відбувається витік рідини, яка збуджує механічні коливання, які є джерелом акустичного сигналу витoku $\xi_B(t)$. Сигнал витoku спотворюється адитивною акустичною шумовою перешкодою $\xi_{\Pi}(t)$, що створюється рухомим потоком рідини, тому сигнал $\xi(t)$ на вході електроакустичного перетворювача, встановленого поблизу точки x_0 , має такий вигляд:

$$\xi(t) = \xi_B(t) + \xi_{\Pi}(t) \quad (1.4)$$

Зробимо наступні припущення щодо властивостей сигналу $\xi_{UT}(t)$ і перешкоди $\xi_{\Pi}(t)$. У загальному випадку $\xi_B(t)$ і $\xi_{\Pi}(t)$ є негауссівськими нестационарними випадковими процесами, проте на коротких проміжках часу (кілька хвилин), необхідних для реєстрації та обробки, ці сигнали можна вважати стаціонарними. Виходячи з фізичних міркувань, можна припустити, що сигнал $\xi_B(t)$ і перешкода $\xi_{\Pi}(t)$ є незалежними випадковими процесами.

Простими, але досить інформативними характеристиками негауссівських процесів є одномірні кумулянти k_s порядку $s = 1, 2, \dots$, які для сигналу $\xi(t)$ дорівнюють

$$k_s = k_{s,UT} + k_{s,\Pi} \quad (1.5)$$

де k , $k_{s,\Pi}$ - кумулянти s -го порядку сигналу витoku і перешкоди.

Принцип виявлення сигналу витoku $\xi_B(t)$ на основі кумулянтного аналізу полягає в наступному. Якщо витік в контрольованому трубопроводі відсутній, то $k_{s,B} = 0$ і всі кумулянти $k_s = k_{s,\Pi}$, а при наявності витoku

$\kappa_s \neq \kappa_{s,\Pi}$. В окремому випадку, коли перешкода $\xi_{\Pi}(t)$ має гауссівський закон розподілу, її кумулянти $\kappa_{s,\Pi} = 0, s \geq 3$. Тоді приймається рішення про відсутність витоку, якщо при $s \geq 3$ $\kappa_s = 0$, і про наявність витоку, якщо $s \neq 0$

Для аналізу можливостей кумулянтного методу виявлення витоків необхідно мати конкретні значення кумулянтів реальних сигналів витоку і перешкод, які можна отримати в результаті проведення натурного експерименту.

Віброакустичний шум підшипників [3, 12-14]

Несправності підшипників являються однією з основних причин відмови різних машин та механізмів. Основні елементи підшипника – внутрішні та зовнішні кільця, тіла кочення і сепаратор – збуджують вібраційну енергію за рахунок циклічних напружень чи зіткнень, характер яких залежить від присутності дефектів.

Частотні характеристики основних елементів мають ярко виражені максимуми (резонанси), обумовлені коливальними властивостями елементів підшипника і його закріпленням. Ці резонанси виникають на основних частотах під дією навантаження, а також при наявності дефекту.

При роботі підшипників кочення в місцях контакту тіл кочення з зовнішнім та внутрішнім кільцями виникають значні механічні напруги. Це призводить до переміщення матеріалу в атомарному масштабі і появи пружних хвиль, які викликають акустичне випромінювання і вібрацію підшипника.

Віброакустичний шум підшипників можна розглядати як відгук багаторезонансної лінійної системи на дію потоку коротких імпульсів, характер яких визначається технічним станом доріжок і тіл кочення, наявністю і станом мастила, якістю встановлення підшипника та ін.

В справному підшипнику параметри імпульсів визначаються технологічними факторами – шорсткістю, гранями і зернистістю доріжок

кочення. Для підшипника з діаметром внутрішнього кільця 0,1 м при швидкості обертання 50 об/с тривалість елементарного імпульсу, викликаного ударом кульки о нерівність доріжки, не перевищує 0,4 мкс. Віб्रोакустичний шум справного підшипника має рівномірну спектральну густину до декількох МГц і гауссівський розподіл моментальних значень.

Експлуатаційні фактори, до яких відноситься знос кінематичних пар, поява втомних тріщин, зародження мікродефектів та ін., призводять до формування додаткового потоку коротких імпульсів, які слідують хаотично, інтенсивність яких може змінюватись по періодичному закону. Внаслідок цього рівномірний спектр віброакустичного шуму декілька розширюється, і в ньому утворюються дискретні складові. Закон розподілу моментальних значень віброакустичного шуму перестає бути гауссівським. Зокрема, при відсутності мастила у підшипнику, його дефекту внутрішнього кільця спостерігається зріст коефіцієнтів асиметрії і ексцесу віброакустичного шуму.

1.2. Моделі шумових акустичних сигналів

Математичні моделі шумових сигналів повинні віддзеркалювати найбільш суттєві сторони фізичних процесів, що досліджуються. Крім того, для практичного застосування моделі необхідним є наявність відповідного математичного апарату, що дозволяє знаходити імовірнісні характеристики шумових сигналів. Розглянемо основні моделі шумових сигналів

Білі шуми [15-19]. Найпростішою моделлю, що відображає широкосмуговість шумових сигналів є білий шум. Розрізняють білий шум в широкому сенсі і білий шум у вузькому сенсі.

Білим шумом в широкому сенсі називається нестационарний випадковий процес $\xi(t)$ з некорельованими миттєвими значеннями, кореляційна функція якого визначається виразом

$$R(t_1, t_2) = \frac{D_0(t_1, t_2)}{2} \delta(t_2 - t_1) \quad (1.6)$$

де $D_0(t_1, t_2) > 0$ – деяка функція двох змінних, інтенсивність білого шуму; $\delta(t)$ – дельта-функція.

Стационарним білим шумом в широкому сенсі називається стаціонарний випадковий процес $\xi(t)$ з некорельованими миттєвими значеннями, у якого кореляційна функція дорівнює

$$R(\tau) = \frac{D_0}{2} \delta(\tau) \quad (1.7)$$

а спектральна щільність рівномірна в усьому частотному діапазоні, тобто

$$S(f) = \frac{D_0}{2}, f \in (-\infty, \infty) \quad (1.8)$$

де $D_0 > 0$ – інтенсивність білого шуму.

Білий шум в кінцевій смузі частот (смуговий шум) являє собою стаціонарний випадковий процес $\xi(t)$, у якого спектральна щільність і кореляційна функція визначені виразом:

$$S(f) = \frac{D_0}{2}, \quad |f| \leq f_B; \quad (1.9)$$

$$R(\tau) = D_0 f_B \frac{\sin(2\pi f_B \tau)}{2\pi f_B \tau}, \quad (1.10)$$

де f_B – верхня гранична частота шуму.

Рожевий шум – стаціонарний випадковий процес $\xi(t)$, у якого спектральна щільність і кореляційна функція рівні:

$$S(f) = \frac{D_0}{2} \frac{a^2}{a^2 + (2\pi f)^2}; \quad (1.11)$$

$$R(\tau) = \frac{D_0 a}{2} e^{-a|\tau|}, \quad (1.12)$$

де $a > 0$. Верхня гранична частота рожевого шуму, яка визначається на рівні -

3 дБ, дорівнює $f_B = \frac{a}{2\pi}$.

Відмітимо, що назва моделі “білий шум” з’явилася у зв’язку з аналогією з білим світлом в оптиці, що має рівномірний суцільний спектр у видимій області.

Дисперсія білого шуму нескінченна, а інтервал кореляції дорівнює нулю, тому білий шум з неперервним часом не є таким, що фізично реалізується. На практиці модель білого шуму використовується для опису широкосмугових стаціонарних випадкових процесів зі скінченною дисперсією, в якого ширина спектру набагато більша за смугу пропускання системи, на яку впливає цей процес.

Використання моделі білого шуму в широкому сенсі обмежує можливість розв’язку задач дослідження шумових сигналів та їх функціональних перетворень рамками кореляційно-спектральної теорії.

Аналізувати більш повні імовірнісні характеристики шумових сигналів – їх закони розподілу, моментні функції високих порядків та ін., дозволяє застосування білого шуму у вузькому сенсі.

Білим шумом у вузькому сенсі називається випадковий процес $\xi(t)$ з незалежними значеннями, у якого функція розподілу дорівнює

$$F(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = \prod_{k=1}^n F(x_k, t_k) \quad (13)$$

Безпосереднє використання формули (1.13) дозволяє коректно визначити тільки білий шум у вузькому сенсі з дискретним часом $t_1, \dots, t_n \in T$, який є послідовністю незалежних однаково розподілених випадкових величин ξ_1, \dots, ξ_n з одновимірною функцією розподілу $F(x, t)$.

Білий шум у вузькому сенсі з неперервним часом не може бути визначений формулою (1.13). В теорії випадкових процесів строге визначення білого шуму у вузькому сенсі базується на зв’язку між процесами з незалежними значеннями і процесами з незалежними приростами.

Білим шумом у вузькому сенсі називається узагальнена похідна $\eta'(t)$ від процесу з незалежними приростами $\eta(t)$

$$\eta'(t) = \frac{d\eta(t)}{dt} \quad (1.14)$$

Відмітимо, що якщо в наведеному визначенні $\eta(t)$ – випадковий процес з некорельованими приростами, то формула (1.14) визначає білий шум в широкому сенсі.

Визначення (1.14) білих шумів не суперечить визначенням (1.12) і (1.13) та дозволяє в залежності від властивостей процесі з незалежними приростами розрізняти стаціонарні і нестаціонарні білі шуми, класифікувати їх за законами розподілів, аналізувати структуру їх реалізацій.

Зокрема, якщо в формулі (1.14) $\eta(t)$ – процес з незалежними гауссівськими приростами $w(t)$, то процес $w'(t)$ є гауссівським білим шумом, в загальному випадку нестаціонарним. Якщо у формулі (1.14) $\eta(t)$ – узагальнений процес Пуассона $\pi(t)$, то процес $\pi'(t)$ є пуассонівським білим шумом.

$$\pi'(t) = \sum_{k=1}^{v(t)} \eta_k \delta(t - t_k) \quad (1.15)$$

Довільний процес з незалежними приростами є сумою гауссівського процесу з незалежними приростами $w(t)$ та зліченною або незліченною сумою узагальнених процесів Пуассона $\pi(t)$. Тому більший шум у вузькому сенсі можна трактувати як потік дельта-імпульсів, які виникають у випадкові моменти часу t_k і мають випадкові амплітуди η_k .

Процеси Бунімовича-Райса [20–22]. Вважається, що флуктуаційний сигнал $\xi(t)$ в момент часу t в точці прийому є результатом накладання деякої кількості $v(t)$ елементарних імпульсів

$$\xi(t) = \sum_{k=1}^{v(t)} \eta_k h(t - t_k), t > 0 \quad (1.16)$$

де випадкові моменти часу t_k є однорідним пуассонівським потоком подій з параметром λ , форма елементарних імпульсів однакова для всіх моментів часу t_k і описується не випадковою функцією $h(t)$, а амплітуди імпульсів η_k є взаємно незалежними однаково розподіленими випадковими величинами, які не залежать від t_k .

Відмітимо, що якщо форма елементарних імпульсів описується дельта-функцією $\delta(t)$, то модель (1.16) є стаціонарним пуассонівським білим шумом (1.15).

Систематичне вивчення імовірнісних характеристик моделі (1.16) бере свій початок з фундаментальних робіт В.І Бунімовича [20] і С. Райса [21] по вивченню дробового шуму в електронних лампах. В цих роботах отримані характеристичні функції процесу (1.16), його одновимірні кумулянти, кореляційно-спектральні характеристики, вирішений ряд задач аналізу лінійних і нелінійних перетворень процесу (1.16) і задача перетинів.

З результатів робіт [20] і [21] випливає, що (1.16) є стаціонарним у вузькому сенсі випадковим процесом, а його одновимірні кумулянти κ_s , кореляційна функція $R_\xi(\tau)$ і спектральна щільність $S_\xi(f)$ дорівнюють:

$$\kappa_s = \lambda \alpha_s \int_{-\infty}^{\infty} h^s(t) dt;$$

$$R_\xi(\tau) = \lambda \alpha_2 \int_{-\infty}^{\infty} h(t) h(t + \tau) dt;$$

$$S_\xi(f) = \lambda \alpha_2 |H(f)|^2,$$

де α_s – s-й початковий момент амплітуд η_k імпульсів;

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-i2\pi ft} dt$$

Одновимірною характеристичною функцією процесу (1.16) дорівнює

$$f_{\xi}(u) = \exp\left\{\lambda \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [\exp(iuxh(t)) - 1] dF_{\eta}(x) dt\right\}, \quad (1.17)$$

де $F_{\eta}(x)$ - функція розподілу амплітуд η_k імпульсів.

В роботі [22] доведено, що характеристична функція (1.17) процесів (1.16) безмежно подільна і може бути представлена в канонічній формі Колмогорова

$$f_{\xi}(u) = \exp\left\{i u m_{\xi} \int_{-\infty}^{\infty} (e^{iux} - 1 - iux) x^{-2} dK_{\xi}(x)\right\} \quad (1.18)$$

Математичне сподівання m_{ξ} в представленні (1.18) дорівнює

$$m_{\xi} = \lambda m_{\eta} \int_{-\infty}^{\infty} h(t) dt$$

де $m_{\eta} = M[\eta_k]$, а пуассонівська спектральна функція $K_{\xi}(x)$ обчислюється за формулою

$$K_{\xi}(x) = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} K_h(x, y) dF_{\eta}(y),$$

де $K_h(x, y)$ - ядро перетворення яке дорівнює

$$K_h(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} h^2(t) E[x - yh(t)] dt$$

При виконанні умови $K_h(x, y) \gg 1$, де τ_0 - тривалість (ефективна тривалість) елементарного імпульсу, розподіл процесів (1.16) можна вважати гауссівським.

Модель (1.16) знайшла широке використання в радіофізиці, статистичній радіотехніці, електроніці, в дослідженнях феромагнетизму, акустичної емісії, кавітаційного шуму, морської реверберації. Результати

робіт [20] і [21] явились основою для дослідження імовірнісних характеристик процесів (1.16) та їх різноманітних узагальнень.

Висновки до першого розділу:

У першому розділі був виконаний аналіз декількох акустичних сигналів їх характеристик та моделей.

Існує велика кількість акустичних сигналів, таких як: акустична емісія, кавітація, акустичні сигнали витoku, вібраційні шуми та багато ін. У загальному акустичні сигнали викликані зміною певних параметрів середовища і подальше розповсюдження коливань у ньому.

Аналіз моделей цих сигналів показав, що щільність імовірності можна знайти лише в окремих випадках. Тому необхідно використовувати наближені методи знаходження щільності імовірності.

РОЗДІЛ 2. ОЦІНЮВАННЯ ЗАКОНІВ РОЗПОДІЛУ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН І ПРОЦЕСІВ

2.1. Закони розподілу випадкових процесів [23]

Найбільш повно випадковий процес $\xi(t)$ можна задати за допомогою багатовимірної функції розподілу $F(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n)$, яка визначається наступним чином

$$F(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = \mathbf{P}\{\xi(t_1) < x_1, \dots, \xi(t_n) < x_n\}$$

Для довільних $n=1, 2, 3, \dots$ та задовольняє умовам узгодженості та симетрії. Процеси, які можна задати багатовимірними функціями розподілу, називаються *сепарабельними*.

Якщо існує така функція $p(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n)$, що при довільних t_1, \dots, t_n має місце рівність

$$F(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = \int_{-\infty}^{x_n} \dots \int_{-\infty}^{x_1} p(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) dx_1 \dots dx_n,$$

то ця функція, що називається *щільністю імовірності*, також дає вичерпаний опис випадкового процесу.

В цьому випадку миттєві значення випадкового процесу в довільні моменти часу t_1, \dots, t_n є неперервними випадковими величинами, його функція розподілу є неперервною по всіх аргументах $x_k, k=1, n$, тому його щільність імовірності випадкового процесу дорівнює

$$p(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = \frac{\partial^n F(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n)}{\partial x_1 \dots \partial x_n}.$$

Широкі можливості при дослідженні інформаційних сигналів дає задавання випадкового процесу за допомогою *характеристичної функції* $f(u_1, \dots, u_n; t_1, \dots, t_n)$, яка являє собою багатовимірне перетворення Фур'є-Стілтєсса від функції розподілу та існує для всіх випадкових процесів.

Зокрема, якщо миттєві значення процесу $\xi(t)$ є неперервними випадковими величинами, то його характеристична функція визначається як багатовимірне перетворення Фур'є від щільності імовірності, тобто

$$f(u_1, \dots, u_n; t_1, \dots, t_n) = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty}}_n e^{i \sum_{k=1}^n u_k x_k} p(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) dx_1, \dots, dx_n,$$

де $i = \sqrt{-1}$.

За відомою характеристичною функцією випадкового процесу завжди отримати його функції розподілу або щільність імовірності. Зокрема, якщо задана характеристична функція $f(u_1, \dots, u_n; t_1, \dots, t_n)$, то щільність імовірності знаходиться за формулою обернення

$$p(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n) = \frac{1}{(2\pi)^n} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty}}_n e^{i \sum_{k=1}^n u_k x_k} f(u_1, \dots, u_n; t_1, \dots, t_n) du_1, \dots, du_n.$$

Зазначимо два важливих для застосування класи випадкових процесів. Випадковий процес $\xi(t)$ називається *стаціонарним (стаціонарним у вузькому сенсі)*, якщо його багатовимірна функція розподілу при довільних n не залежить від початку відліку часу, тобто при зсуві всіх точок спостереження $t_1, \dots, t_n \in T$ вздовж осі часу на будь-яку довільну величину $\tau > 0$ виконується рівність

$$F(x_1, \dots, x_n; t_1 + \tau, \dots, t_n + \tau) = F(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n)$$

для всіх $t_k + \tau \in T, k = 1, n$

Випадковий процес $\xi(t)$ називається *періодичним (періодичним у вузькому сенсі)*, якщо для деякого фіксованого $T_0 > 0$ його функція розподілу задовольняє умові

$$F(x_1, \dots, x_n; t_1 + T_0, \dots, t_n + T_0) = F(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n)$$

Число T_0 називається *періодом періодичного випадкового процесу*. Важливо підмітити, що для будь-якого моменту часу t_0 миттєві значення $\xi(t_k)$, $t_k = t_0 + kT_0, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, періодичного процесу $\xi(t)$ є стаціонарною у вузькому сенсі випадковою послідовністю.

Визначення стаціонарності і періодичності випадкового процесу відповідним чином формулюються в термінах щільності імовірностей і характеристичної функції.

2.2. Наближені методи знаходження щільності імовірності акустичних сигналів

Загальна характеристика наближених методів. Інформаційні сигнали, як зазначалось вище, в загальному випадку мають негауссівський розподіл миттєвих значень і знаходження їх щільності імовірності в більшості випадків не має точних аналітичних розв'язків.

При впливі на лінійну систему гауссівських випадкових процесів процеси на виході системи також будуть гауссівськими [17, 24], а при негауссівських впливах можуть відбуватися ефекти нормалізації та денормалізації [25, 26] вхідних процесів. Задача точного знаходження щільності імовірності процесів на виході лінійної системи при негауссівських вхідних процесах на сьогодні не вирішена.

При проходженні випадкових сигналів крізь нелінійні системи, наприклад типовий тракт виявлення [27], їх закон розподілу принципово змінюється. Задача знаходження щільності імовірності випадкових процесів на виході нелінійної системи може бути вирішена точно лише за умови, коли нелінійна система є безінерційною та має монотонну амплітудну характеристику.

Таким чином, як при знаходженні щільності імовірностей самих інформаційних сигналів, так і при аналізі результатів їх функціональних перетворень в більшості випадків необхідно застосовувати наближені методи.

Найпоширенішими наближеними методами знаходження щільності імовірності стаціонарних випадкових процесів на сьогоднішній день є топографічні та апроксимаційні методи.

Топографічні методи [28] базуються на представленні невідомої щільності імовірності точкою на площині в системі координат, пов'язаній з моментами третього та четвертого порядку. Найбільш розповсюдженими є методи, що базуються на системах розподілів Пірсона та Джонсона, в яких невідомій щільності імовірності відповідає точка на площині в системі координат (β_1, β_2) , де $\beta_1 = \gamma_3^2$, $\beta_2 = \gamma_4 + 3$, γ_k - k -й кумулянтний коефіцієнт досліджуваного випадкового процесу. Топографічні методи не враховують моменти вище четвертого порядку, тому розв'язок задачі визначення невідомої щільності імовірності в багатьох випадках проводить до неоднозначних результатів.

Апроксимаційні методи [29] базуються на представленні досліджуваної функції $f(x)$ у вигляді функціонального ряду

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi_k(x), \quad (2.1)$$

де $\varphi_k(x)$ - деяка система лінійно незалежних функцій, які називаються базисними; c_k - коефіцієнти розкладення функції $f(x)$ в базисі $\varphi_k(x)$.

Не порушуючи загальності, сформулюємо задачу знаходження щільності імовірності випадкової величини з використанням представлення (2.1).

Нехай $p_x(x)$ - апроксимація неперервної щільності імовірності $p(x)$ частковою сумою ряду (2.1), тобто

$$p_x(x) = \sum_{k=0}^n c_k \varphi_k(x) \quad (2.2)$$

де $\varphi_k(x)$ - задана система базисних функцій. Необхідно визначити коефіцієнти c_k так, щоб помилка апроксимації ε була мінімальною в рамках

обраної метрики між функціями $p(x)$ і $p_n(x)$, та прямувала до нуля при $n \rightarrow \infty$.

При використанні апроксимації (2.2) основними задачами є вибір базисних функцій $\varphi_k(x)$, знаходження способів обчислення коефіцієнтів c_k , визначення умов однозначності розв'язку та збіжності ряду при $n \rightarrow \infty$.

Розглянемо детальніше основні наближені методи знаходження щільності імовірності.

2.3. Система розподілів Пірсона.

Розподілами Пірсона називається неперервні унімодальні розподіли, щільності імовірності $p_{\Pi}(x)$ яких задовольняють диференційному рівнянню [30]

$$\frac{\partial p_{\Pi}(x)}{\partial x} = \frac{a_0 + x}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2} p_{\Pi}(x) \quad (2.3)$$

де a_0, b_0, b_1, b_2 - деякі дійсні числа.

Вперше рівняння (2.3) введене К. Пірсоном в 1894 р. Для апроксимації емпіричної щільності імовірності теоретичними кривими методом моментів [30]

Коефіцієнти a_0, b_0, b_1, b_2 рівняння (2.3) неважко зв'язати з моментами розподілів Пірсона. Визначимо щільність імовірності $\tilde{p}_{\Pi}(x)$ наступним чином:

$$\tilde{p}_{\Pi}(x) = p_{\Pi}(x + m),$$

де $m = \alpha_1$ - перший початковий моменти розподілу.

Очевидно, що функція $\tilde{p}_{\Pi}(x)$ задовольняє диференційному рівнянню Пірсона (2.3), яке в даному випадку набуває вигляду

$$\frac{d\tilde{p}_{\Pi}(x)}{dx} = \frac{A_0 + x}{B_0 + B_1 x + B_2 x^2} \tilde{p}_{\Pi}(x), \quad (2.4)$$

а сталі рівняння (2.4) зв'язані зі сталими рівняння (3) співвідношеннями

$$\begin{aligned}
A_0 &= a_0 + m; \\
B_0 &= b_0 + b_1 m + b_2 m^2 \\
B_1 &= b_1 + 2b_2 m; \\
B_2 &= b_2.
\end{aligned}$$

Перепишемо рівняння (2.4) в наступному вигляді:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^s (B_0 + B_1 x + B_2 x^2) d\tilde{p}_{\Pi}(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^s (A_0 + x) d\tilde{p}_{\Pi}(x) dx. \quad (2.5)$$

Інтегруючи ліву частину рівняння (2.5) частинами, отримаємо:

$$sB_0\alpha_{s-1} + [(s+1)B_1 + A_0]\alpha_s + [(s+2)B_2 + 1]\alpha_{s+1} = 0, \quad (2.6)$$

де α_s - початкові моменти щільності імовірності $\tilde{p}_{\Pi}(x)$,

$$\alpha_s = \int_{-\infty}^{\infty} x^s \tilde{p}_{\Pi}(x) dx. \quad (2.7)$$

Початкові і центральні моменти розподілу $\alpha_s = \int_{-\infty}^{\infty} x^s \tilde{p}_{\Pi}(x) dx$ співпадають, тобто $\alpha_s = \mu_s$. Крім того, з виразу (6)

випливає, що $\mu_0 = 1$, $\mu_{-1} = \mu_1 = 0$.

Враховуючи це та поклавши в формулі (6) послідовно $s=0,1,2,3$, отримаємо для невідомих коефіцієнтів A_0, B_0, B_1, B_2 систему з чотирьох рівнянь, розв'язок якої має наступний вигляд:

$$\begin{aligned}
A_0 &= \mu_3(\mu_4 + 3\mu_2^2) / D; \\
B_0 &= -\mu_2(4\mu_2\mu_4 - 3\mu_3^2) / D; \\
B_1 &= -A_0; \\
B_2 &= -(2\mu_2\mu_4 - 3\mu_3^2 - 6\mu_2^3) / D,
\end{aligned} \quad (2.8)$$

де $D = 10\mu_4\mu_2 - 18\mu_2^3 - 12\mu_3^2$.

Введемо позначення $\beta_1 = \gamma_3^2, \beta_2 = \gamma_4 + 3$, де γ_3 і γ_4 - коефіцієнти асиметрії та ексцесу

$$\gamma_3 = \frac{\mu_3}{\mu_2^{3/2}}; \gamma_3 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} - 3;$$

Тоді вираз (8) прийме вигляд

$$\begin{aligned} A_0 &= \pm \mu_2^{5/2} \sqrt{\beta_1} (\beta_2 + 3) / D_1; \\ B_0 &= -\mu_2 (4\beta_2 - 3\beta_1) / D_1; \\ B_1 &= -A_0; \\ B_2 &= -(2\beta_2 - 3\beta_1 - 6) / D_1, \end{aligned} \quad (2.9)$$

де $D_1 = 10\beta_2 - 18 - 12\beta_1$.

Для параметру A_0 у виразі (9) права частина береться зі знаком $-$ при $\mu_3 > 0$ та зі знаком $+$ при $\mu_3 < 0$.

Таким чином, розподіли Пірсона повністю визначаються першими чотирма моментами.

Загальний розв'язок диференційного рівняння (2.4) має вигляд:

$$\tilde{p}_\Pi(x) = P_0 \exp[u(x)],$$

$$\text{де} \quad u(x) = \int \frac{A_0 + x}{B_0 + B_1 x + B_2 x^2} dx, \quad (2.10)$$

а $P_0 > 0$ - стала, що визначається з умови $\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{p}_\Pi(x) dx = 1$.

Розв'язання інтегралу (2.10) залежить від коренів x_1, x_2 рівняння

$$B_0 + B_1 x + B_2 x^2 = 0,$$

які дорівнюють

$$x_{1,2} = -B_1^2 (2B_2)^{-1} (1 \mp \sqrt{1 - \kappa_\Pi^{-1}}),$$

де

$$\kappa_\Pi = B_1^2 / (4B_0 B_2). \quad (2.11)$$

Величина κ_Π визначає характер коренів x_1, x_2 , від яких залежить тип розподілу та інтервал осі x , на якому заданий цей розподіл. Підставляючи в

формулу (2.11) коефіцієнти B_0, B_1, B_2 , що визначені за формулою (2.9), отримаємо зв'язок κ_{Π} з коефіцієнтами β_1, β_2 :

$$\kappa_{\Pi} = \frac{\beta_1(\beta_2 + 3)^2}{4(2\beta_2 - 3\beta_1 - 6)(4\beta_2 - 3\beta_1)}. \quad (2.12)$$

Таким чином, величина κ_{Π} , яку називають *каппою Пірсона*, є критерієм, за яким можна класифікувати розподіли Пірсона.

Зокрема, за класифікацією К. Пірсона [30] залежно від величини κ_{Π} всі розподіли, що визначені рівнянням (2.4) розбиваються на три основних типи розподілів:

I типу, якщо $\kappa_{\Pi} < 0$;

IV типу, якщо $0 < \kappa_{\Pi} < 1$;

VI типу, якщо $\kappa_{\Pi} > 1$.

Значення κ_{Π} , які близькі за величиною до 0 або до 1, та при $\kappa_{\Pi} \rightarrow \pm\infty$ називаються *граничними*. Їм відповідають окремі випадки типів I, IV, VI, які мають самостійні значення та виділяються в окремі (перехідні) типи [33].

Кожній щільності імовірності з розподілів Пірсона в залежності від значень каппи Пірсона κ_{Π} та коефіцієнтів β_1, β_2 відповідає точка на площині в системі координат (β_1, β_2) (рис 2.1).

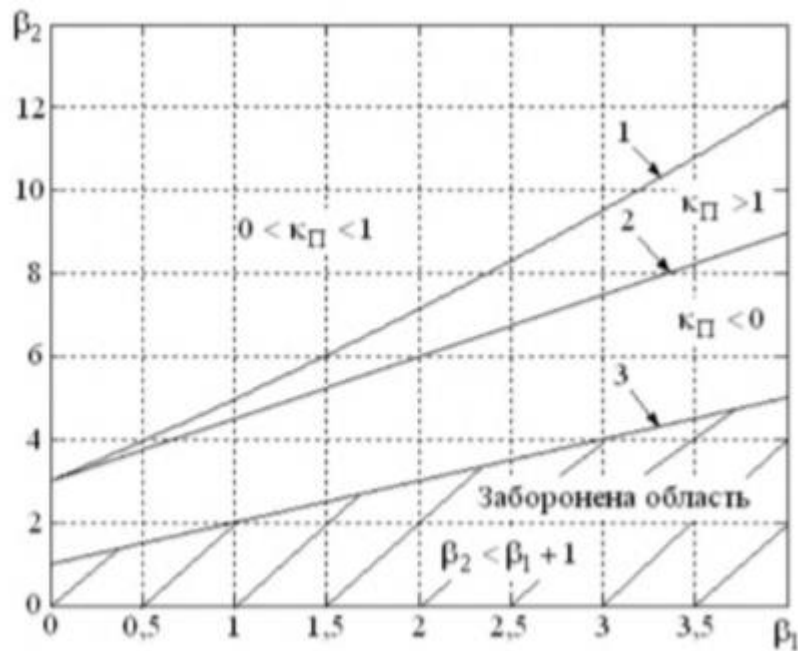


Рис 2.1 Области коэффициентов β_1, β_2 системы распределений Пирсона

На Рис 2.1 линия 1 визначена рівнянням $\kappa_{\Pi}=1$ в формулі (2.12) та є межею між розподілами IV та VI типів. Прямі 2 та 3 визначені відповідно рівняннями $2\beta_2 - 3\beta_1 - 6 = 0$ та $\beta_2 = \beta_1 + 1$.

Між цими прямими лежить область розподілів I типу.

Всього система кривих Пирсона містить 13 типів, таблиці яких найбільш повно представлені в роботі [31]. Серед окремих випадків розподілів Пирсона відзначимо наступні – нормальний розподіл ($\beta_1 = 0, \beta_2 = 9$).

В роботі [23] систему розподілів Пирсона запропоновано використовувати для наближено знаходження щільності імовірності інформаційних сигналів та їх лінійних перетворень.

2.4. Апроксимація сумішшю розподілів [24].

Усі існуючі в даний час методи оцінки щільності імовірності можна розділити на два класи – параметричні і непараметричні методи

Параметричні методи засновані на використанні в якості апріорної моделі досліджуваної випадкової величини одного з класичних розподілів, яке вважається відомим. В цьому випадку задача оцінки невідомої щільності

імовірності зводиться до оцінки по вибірці параметрів модельного розподілу, наприклад, для моделі нормального розподілу – до оцінки його математичного сподівання і дисперсії.

В непараметричних методах щільність імовірності досліджуваної випадкової величини вважається невідомою і оцінюється на основі апріорно прийнятої моделі апроксимації.

Розглянемо методи оцінки щільності імовірності $p(x)$, засновані на її апроксимації $p_n(x)$ кінцевою дискретною сумішшю зсунутих і масштабованих розподілів, тобто

$$p_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{c_k}{b_k} \varphi\left(\frac{x-a_k}{b_k}\right), \quad (2.13)$$

де $\varphi(x)$ - деяка задана щільність імовірності, $a_k \in (-\infty; \infty)$ і $b_k > 0$ - параметри зсуву та масштабу, c_k - коефіцієнти суміші, задовольняючі умовам $c_k \geq 0$, $c_1 + c_2 + \dots + c_n = 1$. Зауважимо, що у формулі (2.13) частина параметрів суміші a_k , b_k чи c_k можуть бути відомими.

Якщо ξ_1, \dots, ξ_N - вибірка об'єму N , отримана у результаті проведення експерименту, то задача оцінки щільності імовірності по формулу (2.13) зводиться до задачі знаходження оцінок невідомих параметрів суміші - \hat{a}_k , \hat{b}_k , \hat{c}_k . В загальному випадку рішення такої задачі зв'язано з важливими проблемами оскільки для отримання оцінок параметрів \hat{a}_k , \hat{b}_k , \hat{c}_k по методу моментів необхідно вирішити систему $3n$ нелінійних рівнянь. У зв'язку з цим обмежимося розглядом окремих випадків.

Нехай $p_n(x)$ - апроксимація неперервної щільності імовірності $p(x)$, тобто

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n c_k \varphi_k(x) = \sum_{k=1}^n \frac{c_k}{b_k} \varphi\left(\frac{x-a_k}{b_k}\right), \quad (2.14)$$

де $\varphi_k(x)$ - задана система базисних функцій.

Будемо вимагати, щоб в формулі (2.14) базисні функції $\varphi_k(x)$ задовольняли умовам:

$$1) \varphi_k(x) \geq 0; 2) \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_k(x) dx = 1. \quad (2.15)$$

Тоді функції $\varphi_k(x)$ є деякими щільностями імовірності, а коефіцієнти c_k задовольняють умовам:

$$1) c_k \geq 0; 2) \sum_{k=0}^n c_k = 1; \quad (2.16)$$

За виконанням умов (2.15) і (2.16) формула (2.3) називається *скінченною дискретною сумішшю розподілів* [32]. В загальному випадку як вагові функції, що задовольняють умовам (2.15), можуть бути обрані довільні щільності імовірності. Зазвичай в суміші розподілів усі функції $\varphi_k(x)$ приймаються одного типу.

Якщо відомі початкові моменти α_s , $s=1, n$, досліджуваної випадкової величини ξ , то коефіцієнти c_k є розв'язком системи $n+1$ рівнянь

$$\tilde{\alpha}_s = \sum_{k=0}^n c_k \tilde{\alpha}_{sk} = \alpha_s, \quad (2.17)$$

де $\tilde{\alpha}_s$ - моменти апроксимуючої щільності імовірності $p_n(x)$, $s=0, n$; $\tilde{\alpha}_0 = 1$,

$$\tilde{\alpha}_{sk} = \int_{-\infty}^{\infty} x^s \varphi_k(x) dx, \quad \tilde{\alpha}_{0k} = 1.$$

В загальному випадку система рівнянь (2.17) є нелінійною, і складність її розв'язку суттєво залежить від вибору базисних функцій $\varphi_k(x)$. Розглянемо окремі випадки суміші розподілів.

1. *Суміш рівномірних розподілів.* Припустимо, що інтервал практично можливих значень випадкової величини ξ становить $[x_{\min}, x_{\max}]$, тобто $\mathbf{P}\{x_{\min} < \xi < x_{\max}\} \approx 1$.

Розіб'ємо цей інтервал на n інтервалів шириною $\Delta x = (x_{\max} - x_{\min}) / n$ та введемо функцію

$$\varphi(x) = \begin{cases} (\Delta x)^{-1}, & x \in (-\Delta x / 2; \Delta x / 2]; \\ 0, & x \notin (-\Delta x / 2; \Delta x / 2]. \end{cases} \quad (2.18)$$

Визначимо базисні функції $\varphi_k(x)$ наступним чином:

$$\varphi_k(x) = \varphi(x - x_k),$$

де $x_k = x_{\min} + 0,5(2k - 1)\Delta x$, $k = 1, n$.

Тоді вираз (130) є сумішшю рівномірних розподілів (2.18)

$$p_n(x) = \sum_{k=1}^n p_k \varphi(x - x_k), \quad (2.19)$$

де p_k – імовірність потрапляння значень досліджуваної випадкової величини у відповідний інтервал Δx , яка на практиці знаходиться за наближеною формулою $p_k \approx \Delta x p(x_k)$, де $p(x_k)$ – значення щільності імовірності в точці x_k .

Як приклад застосуємо суміш рівномірних розподілів (2.19) для апроксимації показникової щільності імовірності

$$p(x) = \exp(-x)E(x).$$

Задаємо діапазон $x \in [0; 5,5]$, значення $n = 11$ та розглянемо два випадки – постійний інтервал $\Delta x = 0,5$ і змінний інтервал Δx_k . В останньому випадку значення Δx_k вибираються як квантілі, що відповідають значенням функції розподілу 0,1; 0,2; ...; 0,9; 0,99 останній інтервал закінчується значенням 5,5.

Для визначення якості апроксимації використаємо максимальну r_{\max} та інтегральну r_{int} помилки, що визначаються наступним чином:

$$r_{\max} = \max |p(x) - p_n(x)|; \quad (2.20)$$

$$r_{\text{int}} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |p(x) - p_n(x)| dx; \quad (2.21)$$

На рис. 2.2 наведені графіки показникової щільності імовірності та суміші рівномірних розподілів (2.18), а в табл. 2.1 – значення помилок апроксимації.

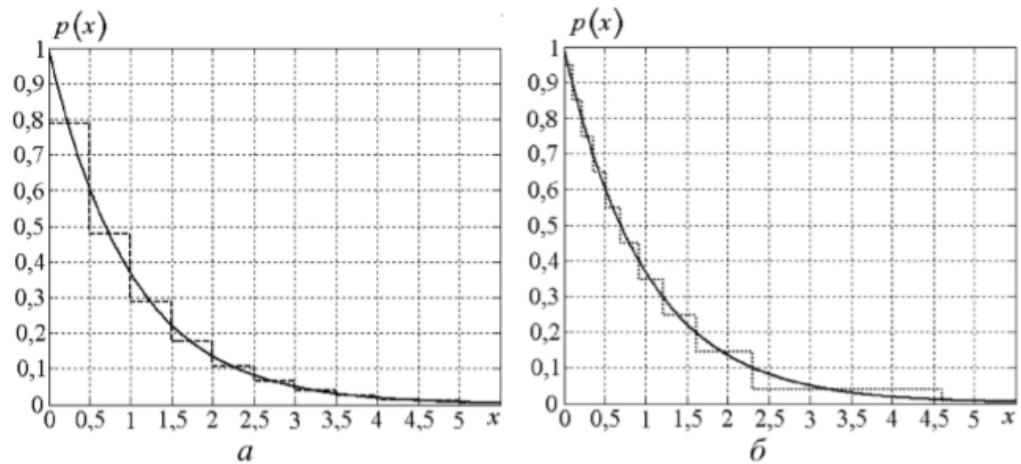


Рис.2.2 Графіки показникової щільності імовірності та суміші рівномірних розподілів: a - з постійним інтервалом Δx , b - зі змінним інтервалом Δx_k .

Таблиця 2.1 Помилка апроксимації показникової щільності імовірності

| Вид апроксимації | r_{\max} | r_{int} |
|------------------------|------------|------------------|
| З постійним інтервалом | 0,2130 | 0,0620 |
| Зі змінним інтервалом | 0,0609 | 0,0536 |

За даними з рис. 2 і табл. 1 видно, що інтегральні помилки апроксимації в обох випадках приблизно однакові, а максимальна помилка у випадку постійного інтервалу Δx більше, ніж втричі, перевищує помилку у випадку змінного інтервалу Δx_k .

2. Гауссівські суміші нехай в формулі (2.14) базисні функції $\phi_k(x)$ дорівнюють

$$\varphi_k(x) = \frac{1}{\sigma_k \sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{(x - m_k)^2}{2\sigma^2} \right\}.$$

Тоді формула (2.14) описує гауссівські суміші розподілів [33], коефіцієнти c_k і параметри яких в загальному випадку знаходять чисельними методами.

Розглянемо докладніше наступну задачу. Нехай у випадкової величини ξ відомі початкові моменти $\alpha_s, s=1, n$, а $p(x)$ - невідома одновершинна симетрична щільність імовірності.

Використаємо для апроксимації щільності $p(x)$ одновершинну симетричну двокомпонентну гауссівську суміш:

$$p_2(x) = \frac{c_1}{\sigma_1} \varphi \left(\frac{x - m_N}{\sigma_1} \right) + \frac{c_2}{\sigma_2} \varphi \left(\frac{x - m_N}{\sigma_2} \right) \quad (2.22)$$

Для вирішення задачі апроксимації щільності $p(x)$ сумішшю (2.22) необхідно знайти її невідомі параметри $\{c_1, c_2, m_N, \sigma_1, \sigma_2\}$. Для цього згідно (2.17) треба скласти систему з п'яти рівнянь, які в задачі, що розглядається, мають вигляд.

$$\alpha_s = \tilde{\alpha}_s = c_1 \alpha_{s1} + c_2 \alpha_{s2}, \quad (2.23)$$

$\tilde{\alpha}_s$ - початкові моменти апроксимуючої суміші (2.22), α_{s1} і α_{s2} - початкові моменти її складових.

Не порушуючи загальності, можна перейти до центрованої величини $\xi = \xi - m$. Тоді $m = m_N = \alpha_{11} = \alpha_{12} = 0$ і у випадкової величини ξ та у суміші (2.22) початкові та центральні моменти співпадають. В цьому випадку моменти складових дорівнюють [28]

$$\alpha_{sj} = \mu_{sj} = \begin{cases} \frac{\sigma_j^s s!}{2^{\frac{s}{2}} \left(\frac{s}{2} \right)!}, & s - \text{парне}; \\ 0, & s - \text{непарне}, \end{cases} \quad j=1,2. \quad (2.24)$$

Підставляючи вираз (2.24) в систему (2.23) та здійснюючи необхідні перетворення, отримуємо скінченну систему рівнянь для знаходження невідомих параметрів суміші $\{c_1, c_2, m_N, \sigma_1, \sigma_2\}$:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1; \\ m = m_N; \\ \mu_2 = \tilde{\mu}_2 = c_1\sigma_1^2 + c_2\sigma_2^2; \\ \mu_2 = \tilde{\mu}_4 = 3(c_1\sigma_1^4 + c_2\sigma_2^4); \\ \mu_6 = \tilde{\mu}_6 = 15(c_1\sigma_1^6 + c_2\sigma_2^6). \end{cases} \quad (2.25)$$

У роботі [34] отриманий точний розв'язок рівняння (2.25) для знаходження параметрів $\{c_1, c_2, m_N, \sigma_1, \sigma_2\}$ суміші (2.22). Зокрема встановлено, суміш (2.22) можна застосувати для розподілів, у яких кумулянтні коефіцієнти γ_4 та γ_6 задовольняють умові

$$\gamma_6 > 5\gamma_4 \left(\frac{\gamma_4}{3} - 1 \right),$$

а параметри суміші обчислюються за формулами

$$\begin{aligned} c_1 &= D(1 + D)^{-1}; & c_2 &= 1 - c_1; \\ m_N &= m; & \sigma_1^2 &= d\sigma_2^2; & \sigma_2^2 &= \mu_2(c_1d + c_2)^{-1}; \end{aligned} \quad (2.26)$$

де $D = B + \sqrt{B^2 - 1}$; $B = 1 + 3\gamma_6^2(50\gamma_4^3)^{-1}$;

$$d = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = \begin{cases} \left(1 - \sqrt{\frac{\gamma_4}{3D}} \right) \left(1 + \sqrt{\frac{D\gamma_4}{3}} \right)^{-1}, & \gamma_6 > 0 \\ \left(1 + \sqrt{\frac{\gamma_4}{3D}} \right) \left(1 - \sqrt{\frac{D\gamma_4}{3}} \right)^{-1}, & \gamma_6 < 0. \end{cases}$$

Проілюструємо використання наведених результатів на прикладі апроксимації щільності імовірності розподілу Стюдента гауссівською сумішшю (2.22).

Щільність імовірності розподілу Стюдента визначається за наступною формулою [34]:

$$p(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\nu\pi}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}, x \in (-\infty, \infty), \quad (2.27)$$

де $\Gamma(x)$ - гамма-функція; ν - параметр розподілу (кількість степенів свободи), ціле додатне число. Параметри розподілу (2.27) обчислюються за формулами:

$$m=0; \quad \sigma^2 = \frac{\nu}{\nu-2}; \quad \gamma_4 = \frac{6}{\nu-4}; \quad \gamma_6 = \frac{240}{(\nu-4)(\nu-6)}.$$

Як помилку апроксимації використаємо інтегральну метрику r_{int} (2.21). Для порівняння апроксимуємо розподіл Стюдента також нормальним розподілом з параметрами m та σ^2 .

На рис. 3 наведені графіки щільності імовірності розподілу Стюдента, суміші (2.22) і нормального розподілу.

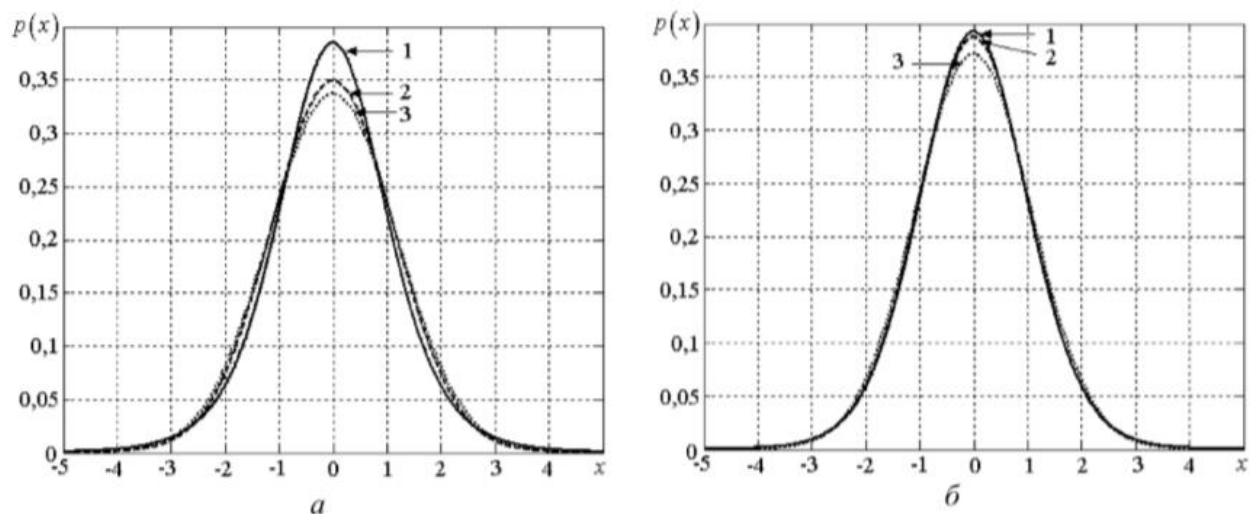


Рис 2.3 Графіки щільності імовірності: 1 – розподілу Стюдента (a - $\nu = 7$, b - $\nu = 15$); 2- суміші (2.22); 3- нормального розподілу

У табл.2 наведені розраховані значення параметрів розподілу Стюдента, параметрів суміші (2.22) і помилок апроксимації $r_{M \text{ int}}$ - сумішню, $r_{N \text{ int}}$ - нормальним розподілом.

Таблица 2.2

| ν | σ^2 | γ_4 | γ_6 | d_1 | d_2 | σ_1^2 | σ_2^2 | $r_{M \text{ int}}$ | $r_{N \text{ int}}$ |
|-------|------------|------------|------------|-------|-------|--------------|--------------|---------------------|---------------------|
| 7 | 1,4 | 2 | 80 | 0,990 | 0,010 | 1,285 | 12,72 | 0,043 | 0,058 |
| 15 | 1,154 | 0,546 | 2,424 | 0,861 | 0,139 | 0,956 | 2,377 | 0,006 | 0,025 |
| 50 | 1,042 | 0,130 | 0,119 | 0,700 | 0,300 | 0,899 | 1,373 | $4 \cdot 10^{-4}$ | 0,007 |

З рис. 3 і табл. 2 випливає, що суміш розподілів (2.22) краще апроксимує розподіл Стюдента в порівнянні з нормальним розподілом.

2.5. Апроксимація відрізком ортогональних рядів [24].

Нехай $p_n(x)$ - апроксимація неперервної щільності імовірності $p(x)$,

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^n c_k \varphi_k(x). \quad (2.28)$$

Припустимо, що щільність імовірності $p(x)$, $x \in [a, b]$, задовольняє умові

$$\int_a^b p^2(x) \rho(x) dx < \infty,$$

де функція $\rho(x)$, яка називається *ваговою*, задовольняє умовам:

$$1) \rho(x) \geq 0; \quad 2) \int_a^b \rho(x) dx < \infty.$$

Припустимо, що базисні функції $\varphi_k(x)$ в формулі (2.28) ортогональні з вагою $\rho(x)$, тобто

$$\int_a^b \varphi_k(x) \varphi_l(x) \rho(x) dx = \begin{cases} 0, k \neq l; \\ \int_a^b \varphi_k^2(x) \rho(x) dx = \|\varphi_k\|^2, k = l, \end{cases}$$

де межі інтегрування можуть бути скінченними або нескінченними. За сформульованих умов помилка апроксимації ε , яка визначена у вигляді

$$\varepsilon^2 = \int_a^b [p(x) - p_n(x)]^2 \rho(x) dx,$$

буде мінімальною, якщо коефіцієнти c_k апроксимації (2.28) дорівнюють

$$c_k = \|\varphi_k\|^{-2} \int_a^b \varphi_k(x) p(x) \rho(x) dx. \quad (2.29)$$

Коефіцієнти c_k , які визначаються за формулою (28), є коефіцієнти ряду Фур'є

$$p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi_k(x), \quad (2.30)$$

А формула (27) – часткова сума цього ряду.

Практичне використання формул (2.28) і (2.29) обмежене, оскільки для знаходження коефіцієнтів c_k необхідно знати щільність імовірності $p(x)$.

Цього можна уникнути, використовуючи замість ряду (2.30) ряд з ваговою функцією $\rho(x)$ [35]. 23, 24, 27]

$$p(x) = \rho(x) \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{c}_k \varphi_k(x), \quad (2.31)$$

В якому базисні функції $\varphi_k(x)$ є поліномами, тобто

$$\varphi_k(x) = \sum_{j=0}^k h_{kj} x^j,$$

де h_{kj} - дійсні числа, які однозначно визначаються ваговою функцією $\rho(x)$.

В цьому випадку коефіцієнти \tilde{c}_k подання (2.31) виражаються через початкові моменти α_s досліджуваної випадкової величини ξ

$$\tilde{c}_k = \|\varphi_k\|^{-2} \int_a^b \varphi_k(x) p(x) dx = \|\varphi_k\|^{-2} \sum_{j=0}^k h_{kj} \alpha_j$$

і ряд (2.31) можна представити в такому вигляді [1]

$$p(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j Q_j(x), \quad (2.32)$$

де $Q_j(x) = \rho(x) \sum_{k=j}^{\infty} \|\varphi_k\|^{-2} \varphi_k(x) h_{kj}, \quad j=0,1,2,\dots$

На практиці в формулі (2.31) використовується часткова сума зі скінченною кількістю складових до n -го порядку, тобто

$$p_n(x) = \rho(x) \sum_{k=0}^n \tilde{c}_k \varphi_k(x). \quad (2.33)$$

У формулі (2.33) як базисні функції найчастіше використовуються поліноми Ерміта, рідко – полінома Лагерра, практично не використовуються поліноми Якобі. Докладніше використання ортогональних поліномів для знаходження щільності імовірності розглянуте в Додатку

Конкретизуємо формулу (2.33), використовуючи поліноми Ерміта [35]. В цьому випадку

$$\varphi_k(x) = H_k(x) = (-1)^k e^{x^2/2} \frac{d^k}{dx^k} (e^{-x^2/2}),$$

$$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, x \in (-\infty; \infty).$$

Поліноми Ерміта використовуються в ряді Грама – Шарльє і його модифікації – ряді Еджворта [35].

Ряди Грама – Шарльє відрізняються між собою кількістю складових, які враховуються, ряди Еджворта – порядком врахування складових коефіцієнтів розкладення відносно n .

Наведемо декілька рядів за поліномами Ерміта [36].

Ряд Грама – Шарльє із врахуванням до четвертого члена:

$$p_1(x) = \rho(x) \left[1 + \frac{\gamma_3}{3!} H_3(x) + \frac{\gamma_4}{4!} H_4(x) \right];$$

Ряд Грама – Шарльє із врахуванням до п'ятого члена:

$$p_2(x) = p_1(x) + \rho(x) \left[\frac{\gamma_5}{5!} H_5(x) \right];$$

Ряд Грама – Шарльє із врахуванням до шостого члена:

$$p_3(x) = p_2(x) + \rho(x) \left[\frac{\gamma_6 + 10\gamma_3^2}{6!} H_6(x) \right];$$

Ряд Еджворта з врахуванням коефіцієнтів до порядку $1/n$:

$$p_4(x) = p_1(x) + \rho(x) \left[\frac{10\gamma_3^2}{6!} H_6(x) \right];$$

Ряд Еджворта з врахуванням коефіцієнтів до порядку $\frac{1}{n^{3/2}}$:

$$p_5(x) = p_4(x) + \rho(x) \left[\frac{\gamma_5}{5!} H_5(x) + \frac{35\gamma_3\gamma_4}{7!} H_7(x) + \frac{280\gamma_3^3}{9!} H_9(x) \right];$$

Ряд Еджворта з врахуванням коефіцієнтів до порядку $\frac{1}{n^2}$:

$$p_6(x) = p_5(x) + \rho(x) \left[\frac{\gamma_6}{6!} H_6(x) + \frac{35\gamma_4^2 + 56\gamma_3\gamma_5}{8!} H_8(x) + \frac{2100\gamma_3^2\gamma_4}{10!} H_{10}(x) + \frac{15400\gamma_3^4}{12!} H_{12}(x) \right].$$

У всіх наведених формулах γ_s - кумулянтні коефіцієнти, $\gamma_s = \kappa_s \kappa_2^{-s/2}$.

Проілюструємо використання рядів Грама-Шарльє та рядів Еджворта на прикладі апроксимації щільності імовірності розподілу Стюдента (2.27).

Оскільки щільність імовірності розподілу Стюдента – парна функція, то всі кумулянтні коефіцієнти γ_s непарного порядку із рядів грама – Шарльє та Еджворта дорівнюють нулю, тому $p_1(y) = p_2(y) = p_4(y) = p_5(y)$.

Для визначення якості апроксимації використаємо інтегральну помилку

$$r_k = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |p(x) - p_k(x)| dx. \quad (2.34)$$

На рис.2.4 наведені графіки щільності імовірності розподілу Стюдента та її апроксимації рядами $p_1(x) - p_6(x)$, а в табл. 3 – значення помилок апроксимації (2.34)

Із рис.2.4 видно, що при $\nu=7$ ряди $p_3(y)$ і $p_6(y)$ мають значні від'ємні значення і відповідно великі помилки апроксимації (див табл.3) тому не можуть використовуватися для апроксимації. Це пояснюється великим значенням γ_6 , а головне тим, що всі парні кумулянтні коефіцієнти, починаючи з γ_8 , не існують. При зростанні ν помилки апроксимації (2.21)

всіма рядами $p_1(x) - p_6(x)$ зменшується, що пояснюється зменшенням кумулянтних коефіцієнтів. З табл.3 видно, що при великих значеннях параметра ν найкращу апроксимацію забезпечує $p_6(y)$.

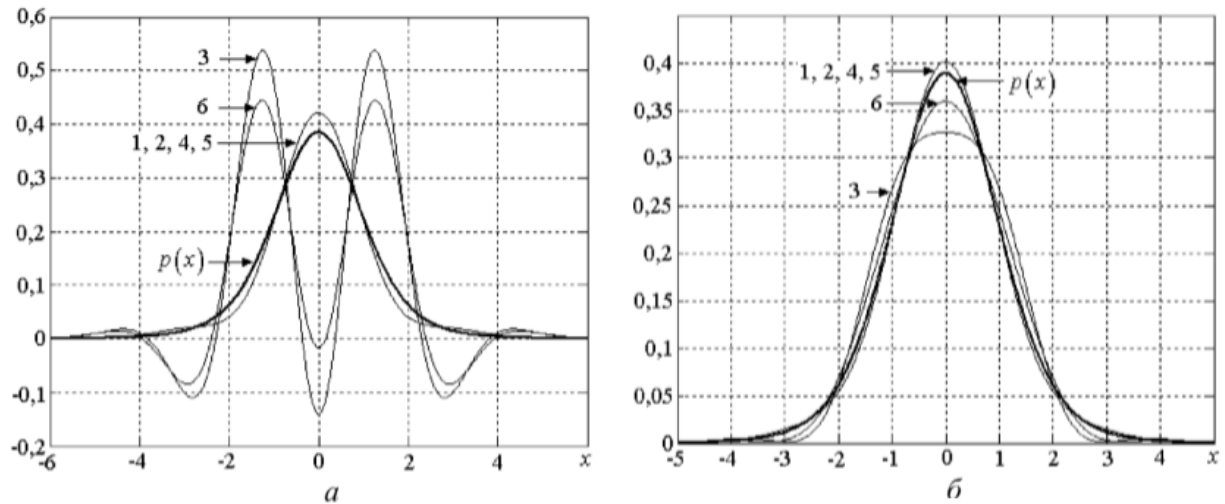


Рис.2.4 Графіки щільності імовірності: $p(x)$ - розподілу Стюдента

($a - \nu = 7$, $b - \nu = 10$);

1 – 6 – рядів $p_1(x) - p_6(x)$

Таблиця 2.3 Помилки апроксимації

| ν | γ_4 | γ_6 | γ_8 | $r_1 = r_2 = r_4 = r_5$ | r_3 | r_6 |
|-------|------------|------------|------------|-------------------------|--------|--------|
| 7 | 2 | 80 | - | 0,0605 | 0,7200 | 0,5765 |
| 10 | 1 | 10 | 490 | 0,0206 | 0,0803 | 0,0438 |
| 15 | 0,546 | 2,424 | 35,041 | 0,0074 | 0,0178 | 0,0066 |
| 20 | 0,375 | 1,071 | 9,141 | 0,0038 | 0,0075 | 0,0021 |
| 25 | 0,286 | 0,602 | 3,644 | 0,0023 | 0,0041 | 0,0010 |

При практичному використанні рядів з ваговою функцією (2.33) для знаходження щільності імовірності необхідний розв'язок ряду проблем, найважливішим з яких є аналіз помилок апроксимації при обмеженні числа складових ортогонального ряду та визначення умов одержання невід'ємних значень подання.

У роботі [37] досліджені співвідношення між значеннями кумулянтних коефіцієнтів, при яких забезпечується невід'ємність відрізків ортогональних рядів по поліномах Ерміта та Лагерра.

Зокрема, для ряду Грама – Шарльє

$$p_1(x) = \rho(x) \left[1 + \frac{\gamma_3}{3!} H_3(x) + \frac{\gamma_4}{4!} H_4(x) \right]$$

Ця область у системі координат $(\gamma_3; \gamma_4)$ наведена на рис. 5

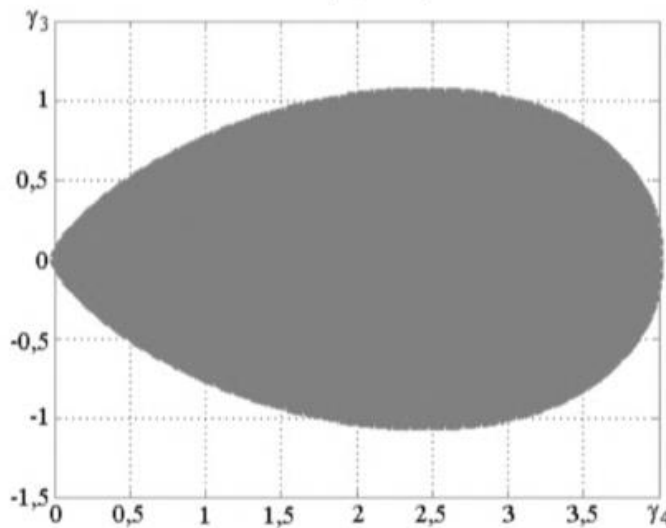


Рис 2.5 Область невід'ємності для ряду Грама – Шарльє $p_1(x)$

2.6. Гістограма [24, 38, 39]

Гістограма являється випадковою частино-постійною функцією, яка будується на основі суміші рівномірних розподілів (2.19), і визначається наступним образом:

$$\hat{p}_n(x) = \sum_{k=1}^n \hat{p}_k \varphi(x - x_k) \quad (2.36)$$

де n - число інтервалів гістограми; $x_k = x_{\min} + 0,5(2k - 1)\Delta x$, $k = 1, n$;

$\Delta x = (x_{\max} - x_{\min}) / n$ - ширина інтервалу гістограми, x_{\min} і x_{\max} - мінімальне і максимальне значення реалізації вибірки; \hat{p}_k - відносні частоти попадання досліджуваної випадкової величини в k -й інтервал гістограми; функція $\varphi(x)$ визначена наступним образом:

$$\varphi(x) = \begin{cases} (\Delta x)^{-1}, & x \in [-\Delta x / 2; \Delta x / 2] \\ 0, & x \notin [-\Delta x / 2; \Delta x / 2] \end{cases}$$

Оцінка (2.36) являється зсунутою, так як

$$\mathbf{M}\hat{p}_n(x) = \frac{\Delta F(x)}{\Delta x} \neq p(x),$$

де $\Delta F(x) = F(x + \Delta x/2) - F(x - \Delta x/2)$ - приріст функції розподілу на інтервалі шириною Δx .

Зсув оцінки $\hat{p}_n(x)$ можна приблизно знайти по формулі [38,40]

$$\Delta x = \mathbf{M}\hat{p}_n(x) - p(x) \approx \frac{(\Delta x)^2}{24} p''(x) \quad (2.37)$$

а її дисперсія приблизно дорівнює

$$D\hat{p}_n(x) = \frac{1}{N(\Delta x)^2} \Delta F(x)[1 - \Delta F(x)] \approx \frac{p(x)}{N\Delta x} \quad (2.38)$$

З формули (2.38) слідує, що оцінка (2.36) є слушною. З використанням формул (2.37) і (2.38) отримаємо вираз для знаходження відносної помилки оцінки (2.36):

$$\delta(x) = \sqrt{\frac{D\hat{p}_N(x) + \Delta^2(x)}{p^2(x)}} = \sqrt{\frac{L}{N\Delta x p(x)} + \frac{(\Delta x)^2}{576} \left(\frac{p''(x)}{p(x)} \right)^2} \quad (2.39)$$

З формули (38) слідує, що відносна помилка оцінки (2.36) істотно залежить від величини інтервалу Δx . Так, при зменшенні Δx зсув (2.37) оцінки зменшується, однак зростає її дисперсія (2.38). При збільшенні Δx ситуація протилежна – дисперсія оцінки зменшується, а її зсув зростає. Таким чином, виникає проблема вибору інтервалу Δx чи, що еквівалентно, числа інтервалів гістограми n .

Зазвичай число інтервалів гістограми рекомендують вибирати в залежності від об'єму вибірки N , в зокрема за наступними формулами [41, 42].

$$n = 1 + 3,321 \lg N; \quad n = 4 \lg N; \quad n = 5(\lg N - 1).$$

Розрахунки показують, що значення числа n , розраховані за приведеними формулам, відрізняються незначно. Так, для об'єму вибірки $N = 10^5$ отримаємо наступні значення n : 18, 19, 20; а для $N = 10^6$ - 21, 24, 25.

Розглянемо приклад застосування оцінки (2.36) для експериментального отримання щільності імовірності $p(x)$ випадкової величини ξ , яка має нормальний розподіл з параметрами $m=0$, $\sigma=1$.

Оскільки у випадку, який ми розглядаємо

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

то

$$p''(x) = \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \right]'' = (x^2 - 1) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} = (x^2 - 1)p(x). \quad (2.40)$$

У результаті моделювання гауссівської випадкової величини ξ з параметрами $m=0$, $\sigma=1$, отримана вибірка ξ_1, \dots, ξ_N об'єму $N=10^6$, у якої $x_{\min} = -5,2934$, $x_{\max} = 4,7015$. Приймаючи $n=21$, знаходимо ширину інтервалу гістограми: $\Delta x = (x_{\max} - x_{\min})/n = 0,476$.

На рис.2.6 приведений графік теоретичної щільності імовірності нормального розподілу з параметрами $m=0$, $\sigma=1$ і гістограма, побудована для вибірки об'ємом $N=10^6$. З рис 6 видно, що гістограма асиметрична вправо, але в цілому добре узгоджується з теоретичною щільністю імовірності.

На рис.2.7 приведений графік відносної помилки $\delta(x)$ оцінки щільності імовірності гауссівської випадкової величини ξ з параметрами $m=0$, $\sigma=1$, розрахованої по формулі (39) при $N=10^6$ і $\Delta x=0,476$.

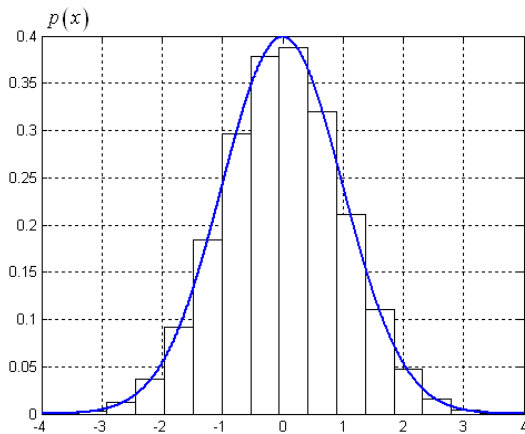


Рис.2.6

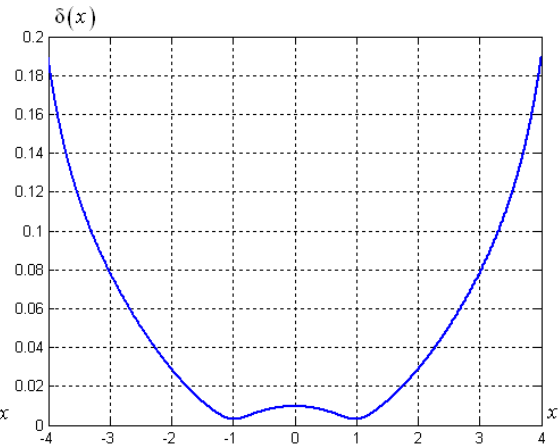


Рис.2.7

Відносна помилка $\delta(x)$ приймає мінімальне значення при двох значеннях: $x: \min \delta(-0,988)=\delta(0,988)=2,9 \cdot 10^{-3}$, а при $x=0$ - $\delta(0)=9,7 \cdot 10^{-3}$. При видаленні значень x від нуля (на хвостах щільності імовірності) відносна помилка $\delta(x)$ суттєво зростає, однак в межах $-3\sigma \leq x \leq 3\sigma$ помилка $\delta < 0,1$.

2.7. Ядерна оцінка щільності імовірності [24, 38, 43]

Використаємо для оцінки щільності імовірності $p(x)$ формулу (2.14), в якій покладемо $n = N$; $c_1 = c_2 = \dots = c_N = N^{-1}$; $b_1 = b_2 = \dots = b_N = h(N)$; $a_k = \xi_k$.

Тоді формула для оцінки щільності імовірності приймає вигляд:

$$\hat{p}_N(x) = \frac{1}{Nh(N)} \sum_{k=1}^N \varphi\left(\frac{x - \xi_k}{h(N)}\right). \quad (2.41)$$

Формулу (2.41) зазвичай називають *оцінкою Парзена-Розенблатта* чи *ядерною оцінкою щільності імовірності* [38 43], функцію $\varphi(x)$ - ядром, а число $h(N)$ - коефіцієнтом вкладу.

Вважається [38], що ядро $\varphi(x)$, яке являється деякою щільністю імовірності, парна функція, тобто, $\varphi(x) = \varphi(-x)$, наприклад,

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0,5, |x| \leq 1; \\ 0, |x| > 1; \end{cases} \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}; \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-|x|\sqrt{2}}.$$

Припускається [38], що коефіцієнт кладу $h(N)$ задовольняє наступним умовам:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} h(N) = 0; \quad \lim_{N \rightarrow \infty} Nh(N) = \infty; \quad \lim_{N \rightarrow \infty} Nh^2(N) = \infty.$$

У роботі [8] приведені наближені формули для зміщення і дисперсії оцінки (34).

$$\Delta(x) \approx \frac{h^2(N)}{2} p''(x)M; \quad \mathbf{D}\hat{p}(x) \approx \frac{p(x)L}{Nh(N)}, \quad (2.42)$$

$$\text{де } M = \int_{-\infty}^{\infty} z^2 \varphi(z) dz, \quad L = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^2(z) dz$$

З використанням формул (2.42) отримаємо вираз для знаходження відносної помилки ядерної оцінки (2.14):

$$\delta(x) = \sqrt{\frac{\mathbf{D}\hat{p}_N(x) + \Delta^2(x)}{p^2(x)}} = \sqrt{\frac{L}{Nh(N)p(x)} + \frac{h^4(N)M^2}{4} \left(\frac{p''(x)}{p(x)} \right)^2} \quad (2.43)$$

З формули (2.41) ми бачимо, що відносна помилка $\delta(x)$ оцінки (13) залежить від виду щільності імовірності $p(x)$ і коефіцієнту вкладу $h(N)$.

В роботі [38] рекомендується задавати $h(N) = \sigma N^{-1/5}$, де σ - середнє квадратичне відхилення досліджуваної випадкової величини ξ . При такому $h(N)$ формула (2.41) приймає вигляд:

$$\hat{p}_N(x) = \frac{1}{\hat{\sigma} N^{4/5}} \sum_{k=1}^N \varphi \left(N^{1/5} \frac{x - \xi_k}{\hat{\sigma}} \right). \quad (2.44)$$

де $\hat{\sigma}$ - оцінка середнього квадратичного відхилення випадкової величини ξ , а відносна похибка (2.43) оцінки дорівнює:

$$\delta(x) = \sqrt{\frac{L}{\sigma N^{4/5} p(x)} + \frac{\sigma^4 M^2}{4 N^{4/5}} \left(\frac{p''(x)}{p(x)} \right)^2}. \quad (2.45)$$

Розглянемо наступний приклад. Нехай ξ – гауссівська випадкова величина з параметрами $m=0$, $\sigma=1$, а ξ_1, \dots, ξ_N – вибірка об'єму N , отримана в результаті проведення експерименту.

Для експериментального знаходження оцінки щільності імовірності випадкової величини ξ застосуємо оцінку (2.43) з ядром

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}. \quad (2.46)$$

В цьому випадку $M=1$; $L=1/\sqrt{2\pi}$; $p''(x)=(x^2-1)p(x)$, і з (2.45) отримаємо формулу для знаходження відносної помилки:

$$\delta(x) = \sqrt{\frac{e^{x^2/2}}{N^{4/5}\sqrt{2}} + \frac{(x^2-1)^2}{4N^{4/5}}}. \quad (2.47)$$

На рис.2.6 штриховою лінією приведені графіки ядерних оцінок щільності імовірності змодельованої гауссівської випадкової величини ξ з параметрами $m=0$, $\sigma=1$ при об'ємах вибірки $N=100$, $N=1000$, $N=10^6$; суцільною лінією показаний графік теоретичної щільності імовірності гауссівського розподілу з параметрами $m=0$, $\sigma=1$.

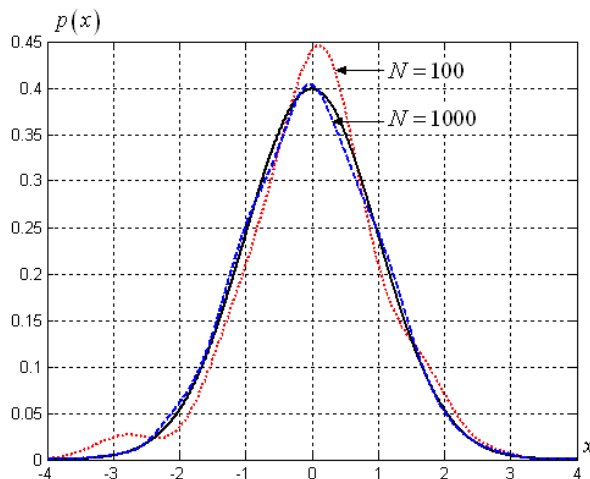


Рис.2.8

З приведених на рис.2.5 графіків видно, що при об'ємі вибірки $N=100$ оцінка (2.44) являється непринятною. При $N=1000$ графік оцінки близький до графіку теоретичної кривої, і оцінку можна вважати задовільною, а при

$N=10^6$ графіки ядерної оцінки і теоретичної щільності імовірності співпадають.

Висновки до другого розділу:

В даний час більшість задача теорії і практики шумової діагностики базуються на гауссівській моделі шумових сигналів і тому вирішені у рамках кореляційно-спектральної теорії. Аналіз багатьох теоретичних і експериментальних досліджень показав, що більшість шумових сигналів являються негауссівськими випадковими процесами. Це обмежує інформативність і застосовність кореляційно-спектральних характеристик.

Для діагностики виникає необхідність застосування негауссівських моделей шумових сигналів. Модель повинна відображати значні сторони досліджуваних фізичних процесів; необхідний добре розроблений апарат дослідження моделі шумового сигналу.

У другому розділі були розглянуті декілька методів оцінки щільності імовірності. Ми обрали ядерне оцінювання, тому що воно не має від'ємних значень, це означає, що комбінація кількох ядер буде не від'ємною. Також це дуже простий метод для знаходження щільності імовірності. Ядерна оцінка базується на основі гауссівського ядра, бо воно є більш розповсюдженим і найбільш дослідженим ядром.

РОЗДІЛ 3. Експериментальні дослідження ядерної оцінки щільності імовірності і порівняння з теоретичними даними

За допомогою середовища MatLab отримаємо реалізації ядерних оцінок щільності імовірності типових розподілів неперервних акустичних сигналів.

Вираз для ядерної оцінки має наступний вигляд:

$$\hat{p}_N(x) = \frac{1}{Nh(N)} \sum_{k=1}^N \varphi\left(\frac{x - \xi_k}{h(N)}\right)$$

Як ядро ми використовуємо найбільш розповсюджене нормальне (гауссівське) ядро

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2};$$

Для отримання точності наближення (помилки апроксимації) ми використовуємо наступну метрику – метрику в середньому

$$r = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |p(x) - p_n(x)| dx,$$

де $p(x)$ – теоретична щільність імовірності, $p_n(x)$ – експериментальна ядерна щільності імовірності.

Вихідні дані для досліджень:

Закони розподілу:

- нормальний закон розподілу;
- закон розподілу Стюдента (число ступенів свободи 7, 10, 28, 64);
- закон розподілу Лапласа.

Проведемо дослідження на наступних об'ємах вибірки випадкових величин (і відповідно – кількості ядер): $N=10^3$, $N=10^4$, $N=10^5$, $N=10^6$.

На рисунках з непарним номером 3.1–3.49 зображені щільності імовірності: червоним кольором зображене теоретичне значення, синім – реалізація ядерної оцінки за експериментальними даними.

На рисунках з парним номером 3.2–3.50 зображено модулі різниці двох значень експериментального і теоретичного

$$|p(x) - p_n(x)|.$$

3.1. Ядерна оцінка щільності імовірності за нормальним законом розподілу

Код для побудови ядерної оцінки щільності імовірності

```
N=1000;
w=normrnd(10,1,N);
sigma=std(w);
xmin=min(w);xmax=max(w);
x=-5:0.001:5;
jadro=zeros(1,length(x));
h=sigma*N^(-1/5);

for i=1:N,
    z=(x-w(i))/h;
    jadro=jadro+(1/N/h)*normpdf(z,0,1);
end;

plot(x,jadro,x,normpdf(x,0,1),'r');grid

r=abs(jadro-normpdf(x,0,1));
plot(x,r);grid

S=0;
for j=1:length(x)-1,
    S=S+0.001*(r(j)+r(j+1))/2;
end;
S
```

Ядерна оцінка з нормальним законом розподілу з об'ємом вибірки N=100

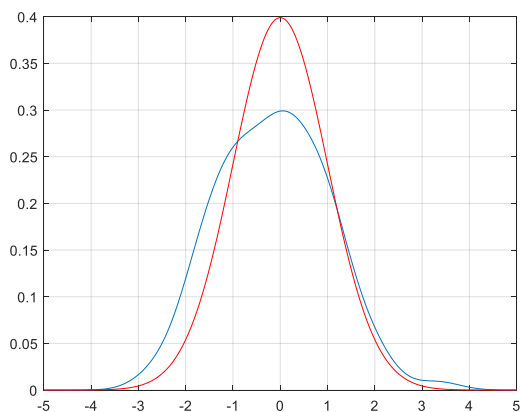


Рис. 3.1

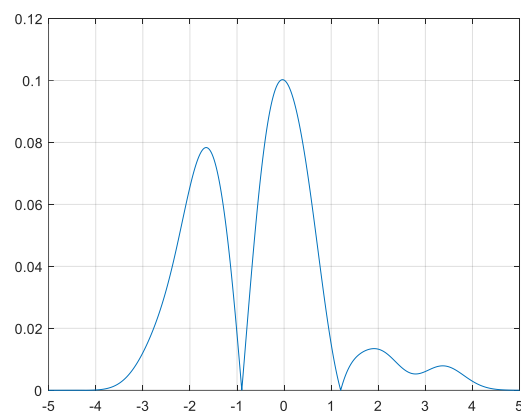


Рис 3.2

Ядерна оцінка з нормальним законом розподілу з об'ємом вибірки
 $N=1000$

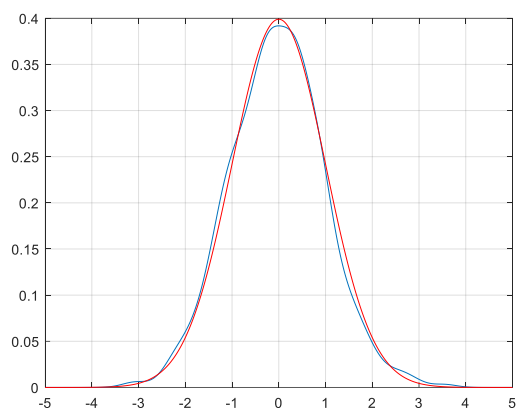


Рис. 3.3

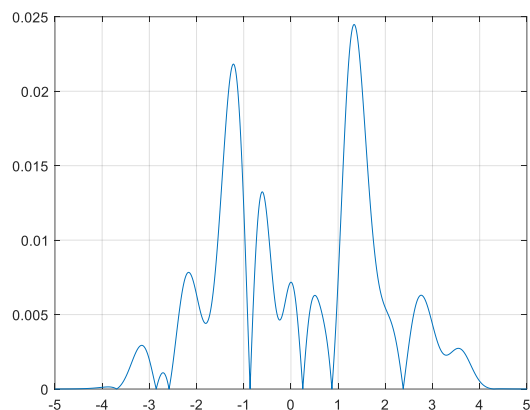


Рис. 3.4

Ядерна оцінка з нормальним законом розподілу з об'ємом вибірки
 $N=10000$

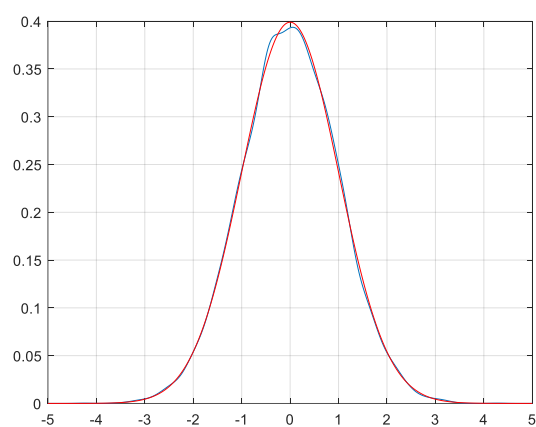


Рис. 3.5

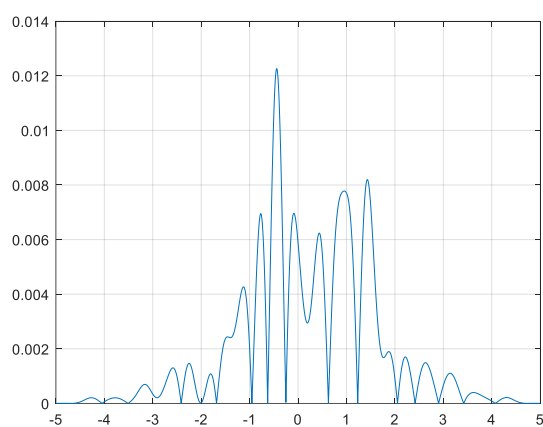


Рис. 3.6

Ядерна оцінка з нормальним законом розподілу з об'ємом вибірки
 $N=100000$

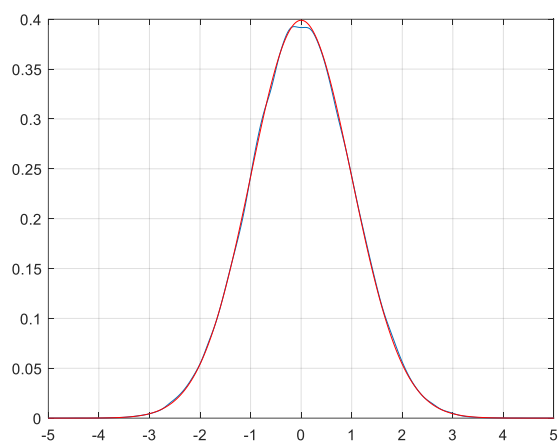


Рис. 3.7

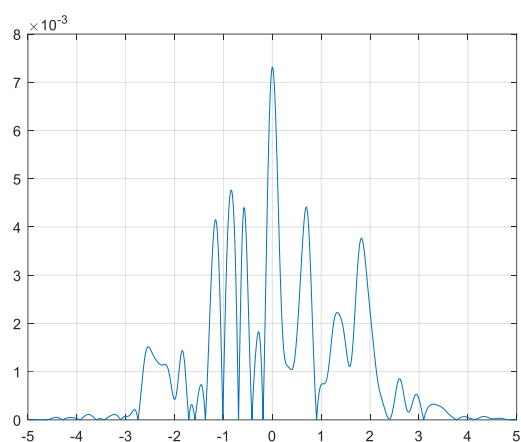


Рис. 3.8

Ядерна оцінка з нормальним законом розподілу з об'ємом вибірки
 $N=1000000$

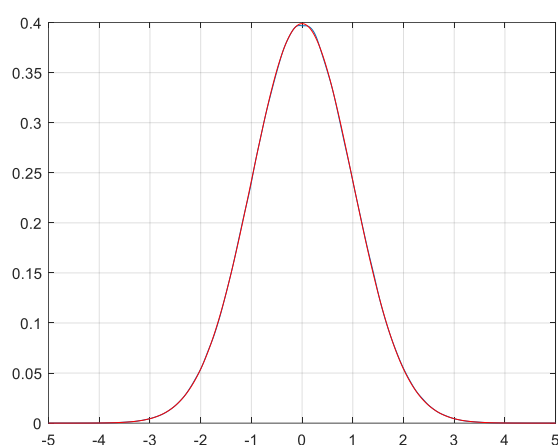


Рис. 3.9

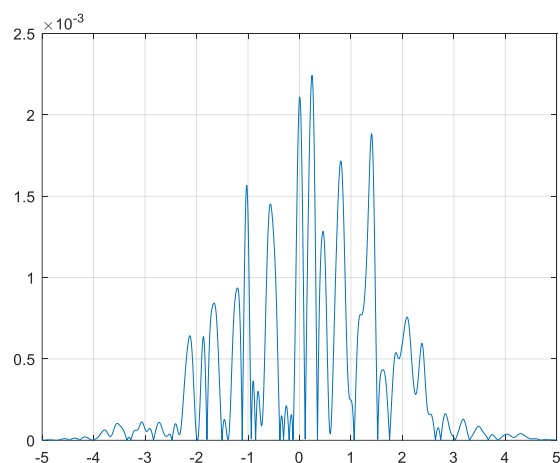


Рис. 3.10

В табл. 3.1 наведено по 10 значень метрик в середньому r_k та їх

$$\text{середнє значення } S = \frac{1}{10} \sum_{k=1}^{10} r_k.$$

Таблиця 3.1 Метрика в середньому експериментального і теоретичного значення з нормальним законом розподілу

| N | r_1 | r_2 | r_3 | r_4 | r_5 | r_6 | r_7 | r_8 | r_9 | r_{10} | S |
|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|----------|--------|
| 10^2 | 0,1264 | 0,0625 | 0,0570 | 0,0551 | 0,0796 | 0,0448 | 0,0842 | 0,0881 | 0,0643 | 0,0584 | 0,0720 |
| 10^3 | 0,0254 | 0,0211 | 0,0251 | 0,0289 | 0,0226 | 0,0335 | 0,4060 | 0,0178 | 0,0219 | 0,0402 | 0,0277 |
| 10^4 | 0,0096 | 0,0180 | 0,0081 | 0,0100 | 0,0163 | 0,0225 | 0,0170 | 0,0076 | 0,0117 | 0,0061 | 0,0117 |
| 10^5 | 0,0052 | 0,0056 | 0,0041 | 0,0047 | 0,0046 | 0,0061 | 0,0035 | 0,0047 | 0,0057 | 0,0053 | 0,0049 |
| 10^6 | 0,0016 | 0,0019 | 0,0019 | 0,0019 | 0,0023 | 0,0022 | 0,0021 | 0,0017 | 0,0020 | 0,0016 | 0,0019 |

3.2. Ядерна оцінка щільності імовірності за законом розподілу Стюдента

Код для побудови ядерної оцінки щільності імовірності

```

N=100000;
P=10
w=trnd(P,1,N);
sigma=std(w);
xmin=min(w);xmax=max(w);
x=-6:0.001:6;
jadro=zeros(1,length(x));
h=sigma*N^(-1/5);
for i=1:N,
    z=(x-w(i))/h;
    jadro=jadro+(1/N/h)*normpdf(z,0,1);
end;
plot(x,jadro,x,tpdf(x,P),'r');grid

r=abs(jadro-tpdf(x,P));
plot(x,r);grid
S=0;
for j=1:length(x)-1,
    S=S+0.001*(r(j)+r(j+1))/2;
end;
```

Ядерна оцінка за законом розподілу Стюдента з об'ємом вибірки
 $N=100$ і числом ступенів свободи 7

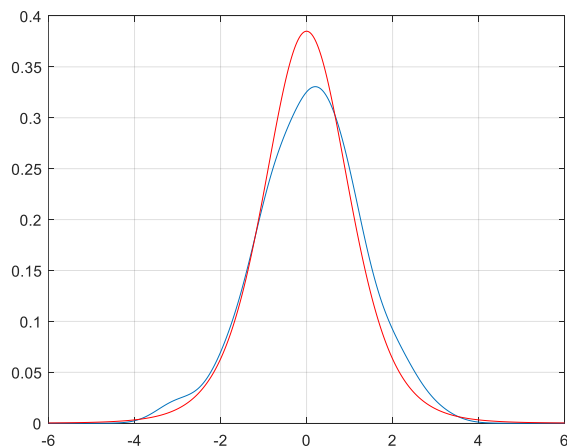


Рис. 3.11

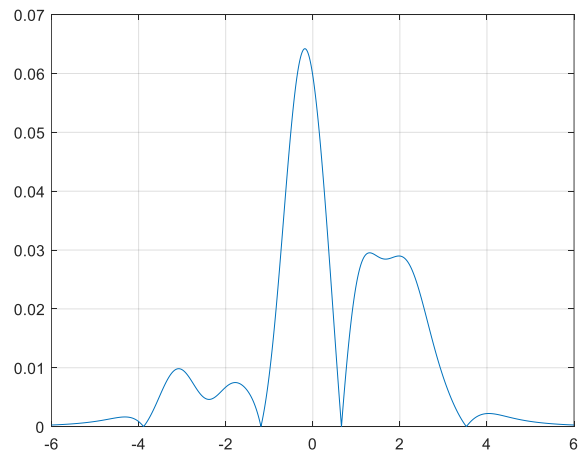


Рис. 3.12

Ядерна оцінка за законом розподілу Стюдента з об'ємом вибірки
 $N=1000$ і числом ступенів свободи 7

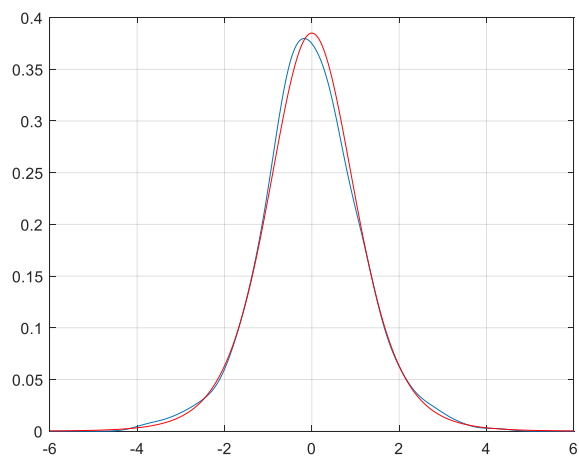


Рис. 3.13

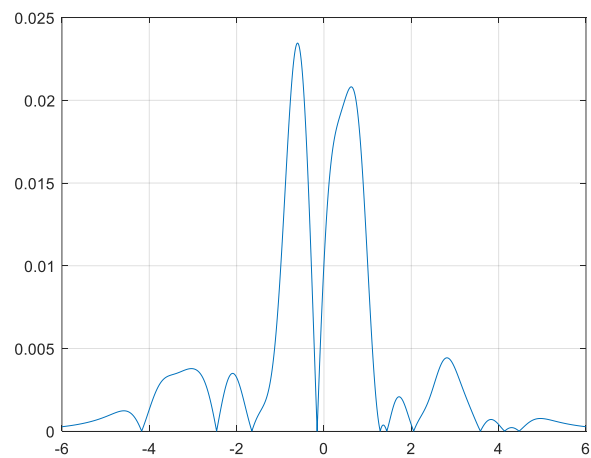


Рис 3.14

Ядерна оцінка за законом розподілу Стюдента з об'ємом вибірки
 $N=10000$ і числом ступенів свободи 7

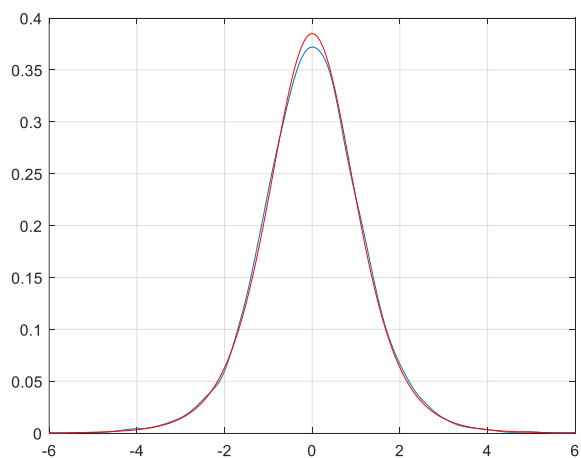


Рис. 3.15

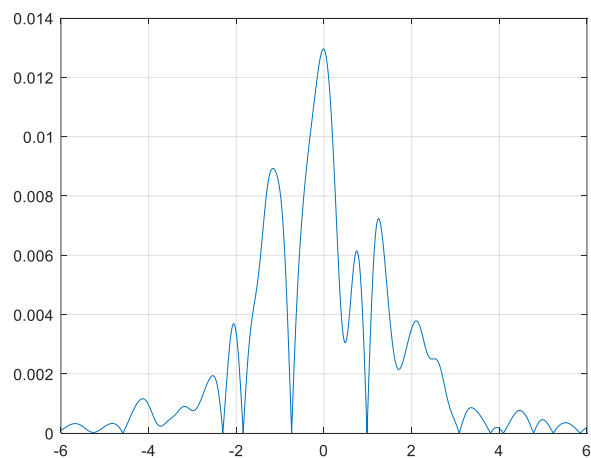


Рис. 3.16

Ядерна оцінка за законом розподілу Стюдента з об'ємом вибірки
 $N=100000$ і числом ступенів свободи 7

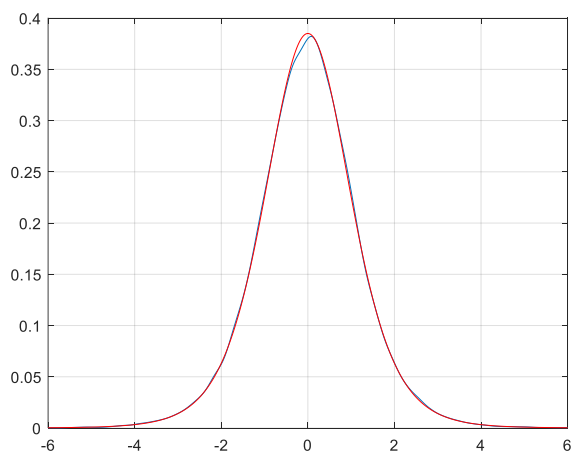


Рис. 3.17

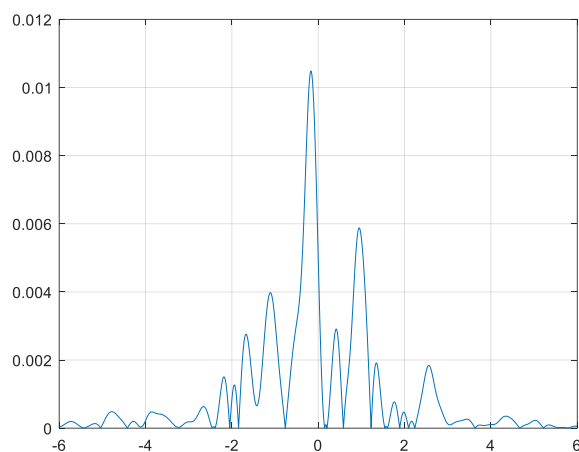


Рис. 3.18

В табл. 3.2 наведено по 10 значень метрик в середньому r_k та їх середнє значення $S = \frac{1}{10} \sum_{k=1}^{10} r_k$.

Таблиця 3.2 Метрика в середньому експериментального і теоретичного значення законом розподілу Стюдента

| N | r_1 | r_2 | r_3 | r_4 | r_5 | r_6 | r_7 | r_8 | r_9 | r_{10} | S |
|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|----------|--------|
| 10^2 | 0,0716 | 0,0084 | 0,0634 | 0,0762 | 0,0591 | 0,0893 | 0,0502 | 0,0940 | 0,0743 | 0,0718 | 0,0658 |
| 10^3 | 0,0241 | 0,0263 | 0,0305 | 0,0345 | 0,0294 | 0,0363 | 0,0202 | 0,0428 | 0,0343 | 0,0203 | 0,0299 |
| 10^4 | 0,0148 | 0,0141 | 0,0101 | 0,0110 | 0,0119 | 0,0142 | 0,0121 | 0,0145 | 0,0160 | 0,0100 | 0,0129 |
| 10^5 | 0,0061 | 0,0056 | 0,0067 | 0,0048 | 0,0040 | 0,0046 | 0,0043 | 0,0055 | 0,0063 | 0,0055 | 0,0053 |

Ядерна оцінка за законом розподілу Стюдента з об'ємом вибірки $N=100$ і числом ступенів свободи 10

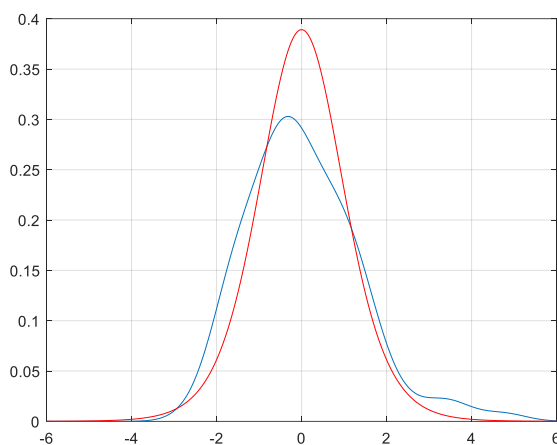


Рис. 3.19

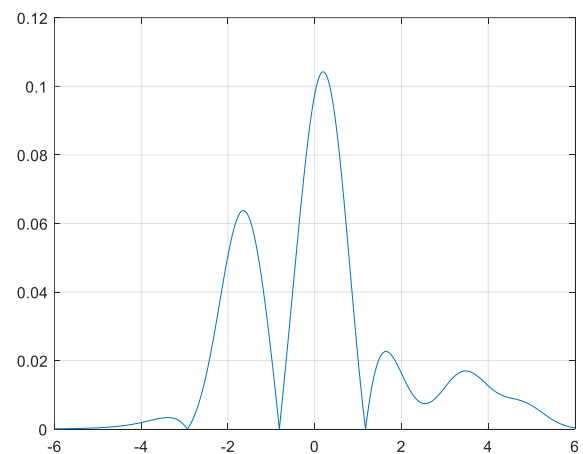


Рис. 3.20

Ядерна оцінка за законом розподілу Стюдента з об'ємом вибірки
 $N=1000$ і числом ступенів свободи 10

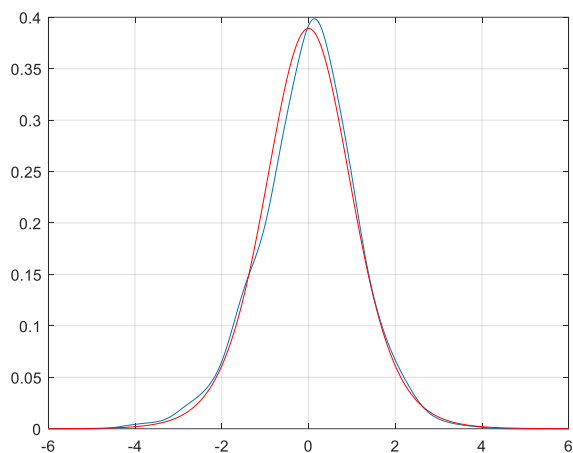


Рис. 3.21

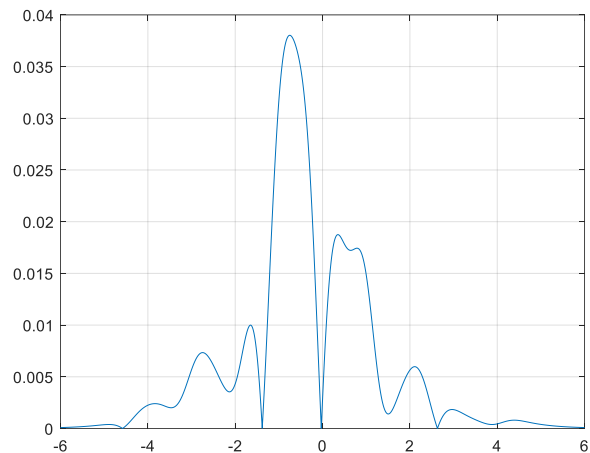


Рис. 3.22

Ядерна оцінка за законом розподілу Стюдента з об'ємом вибірки
 $N=10000$ і числом ступенів свободи 10

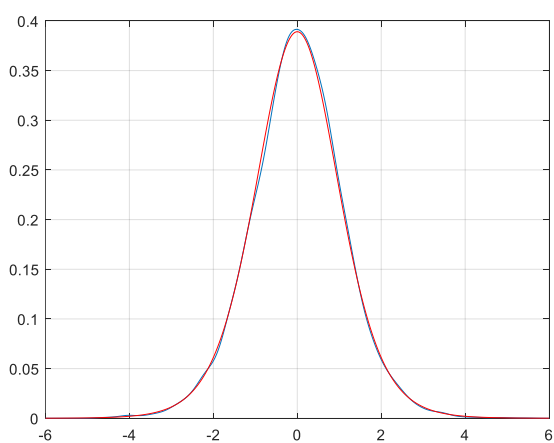


Рис. 3.23

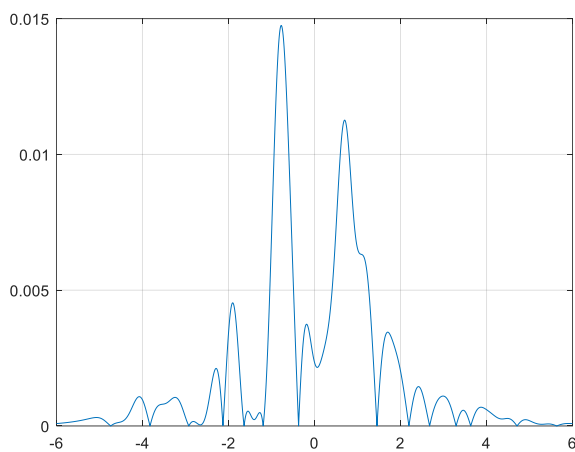


Рис 3.24

Ядерна оцінка за законом розподілу Стюдента з об'ємом вибірки
 $N=100000$ і числом ступенів свободи 10

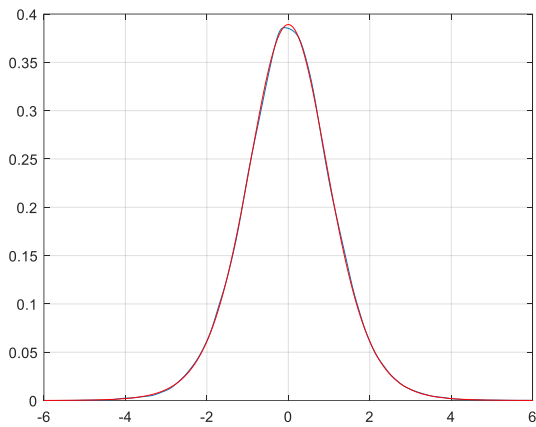


Рис. 3.25

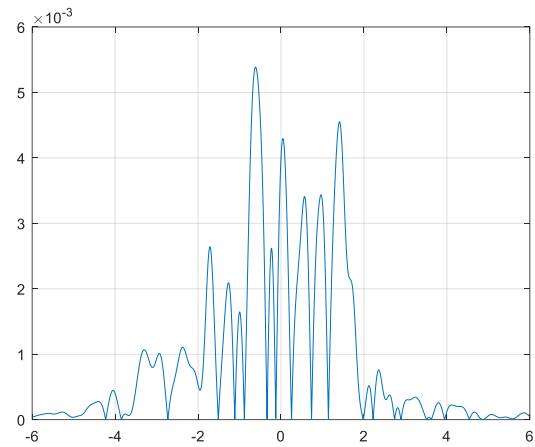


Рис. 3.26

В табл. 3.3 наведено по 10 значень метрик в середньому r_k та їх середнє значення $S = \frac{1}{10} \sum_{k=1}^{10} r_k$.

Таблиця 3.3 Метрика в середньому експериментального і теоретичного значення законом розподілу Стюдента

| N | r_1 | r_2 | r_3 | r_4 | r_5 | r_6 | r_7 | r_8 | r_9 | r_{10} | S |
|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|----------|--------|
| 10^2 | 0,1258 | 0,1875 | 0,1101 | 0,0738 | 0,0715 | 0,1153 | 0,0360 | 0,0865 | 0,1000 | 0,1011 | 0,1008 |
| 10^3 | 0,0370 | 0,0307 | 0,0202 | 0,0269 | 0,0250 | 0,0351 | 0,0271 | 0,0213 | 0,0226 | 0,0185 | 0,0264 |
| 10^4 | 0,0114 | 0,0108 | 0,0113 | 0,0101 | 0,0160 | 0,0096 | 0,0118 | 0,0101 | 0,0131 | 0,0170 | 0,0121 |
| 10^5 | 0,0054 | 0,0063 | 0,0054 | 0,0046 | 0,0049 | 0,0064 | 0,0050 | 0,0049 | 0,0064 | 0,0059 | 0,0055 |

Ядерна оцінка за законом розподілу Стюдента з об'ємом вибірки
 $N=100$ і числом ступенів свободи 28

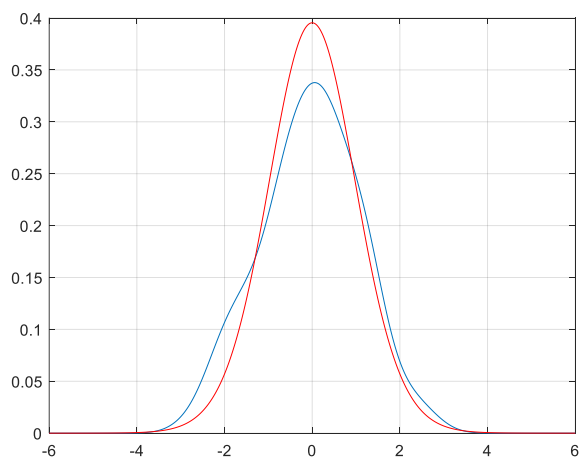


Рис. 3.27

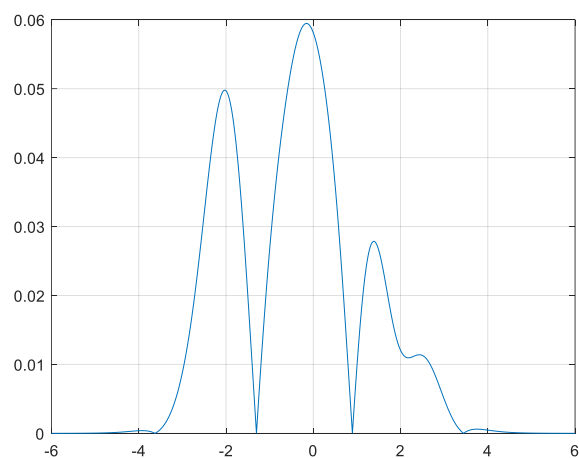


Рис. 3.28

Ядерна оцінка за законом розподілу Стюдента з об'ємом вибірки
 $N=1000$ і числом ступенів свободи 28

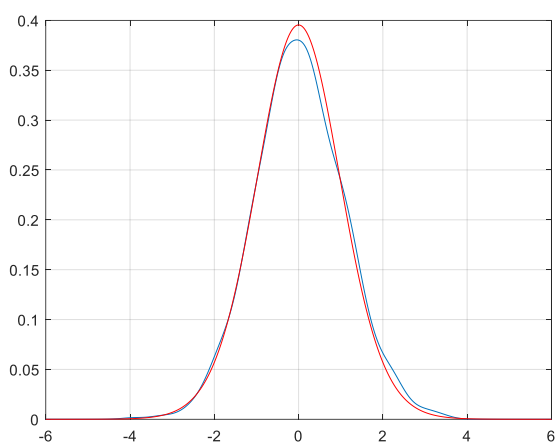


Рис. 3.29

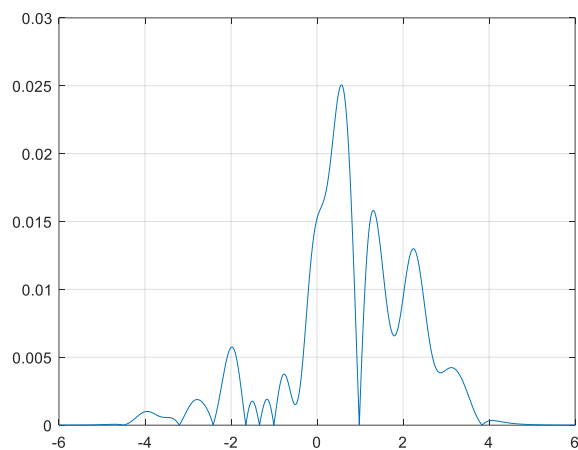


Рис. 3.30

Ядерна оцінка за законом розподілу Стюдента з об'ємом вибірки
 $N=10000$ і числом ступенів свободи 28

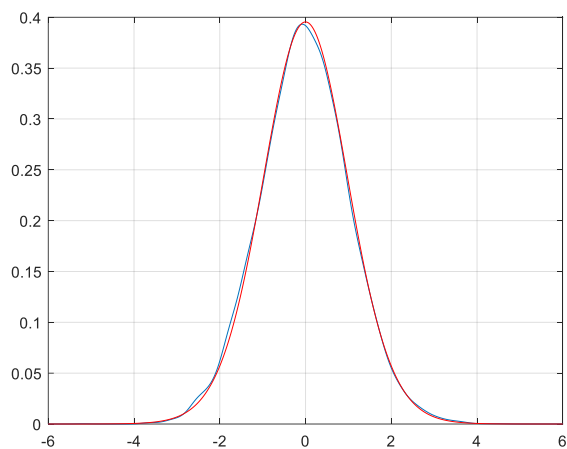


Рис. 3.31

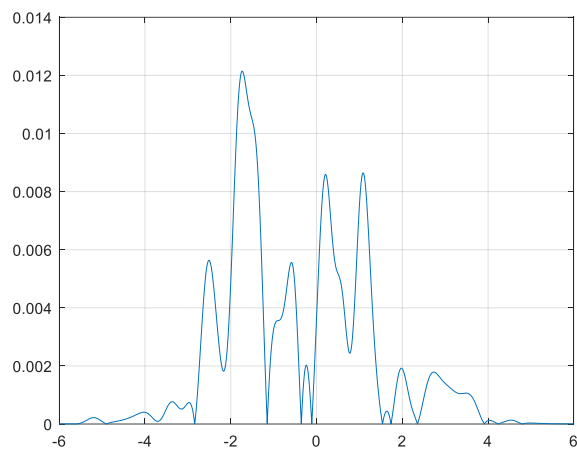


Рис. 3.32

Ядерна оцінка за законом розподілу Стюдента з об'ємом вибірки
 $N=100000$ і числом ступенів свободи 28

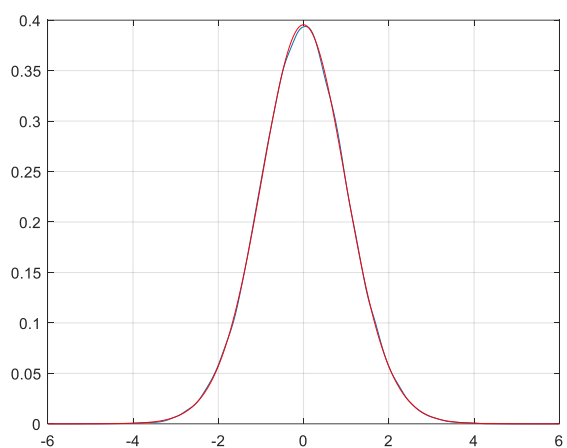


Рис. 3.33

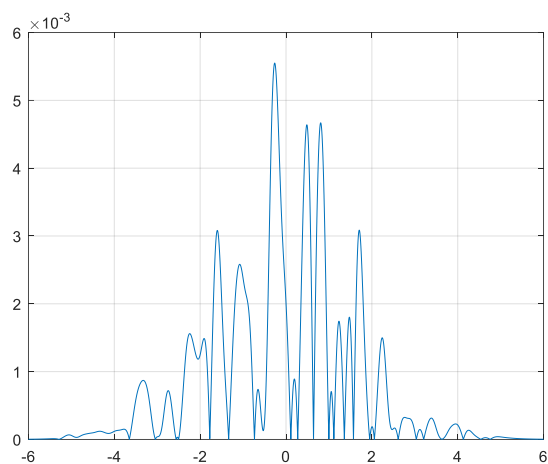


Рис. 3.34

В табл. 3.4 наведено по 10 значень метрик в середньому r_k та їх

середнє значення $S = \frac{1}{10} \sum_{k=1}^{10} r_k$.

Таблиця 3.4 Метрика в середньому експериментального і теоретичного значення законом розподілу Стюдента

| N | r_1 | r_2 | r_3 | r_4 | r_5 | r_6 | r_7 | r_8 | r_9 | r_{10} | S |
|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|----------|--------|
| 10^2 | 0,0869 | 0,0483 | 0,0823 | 0,0641 | 0,0799 | 0,0634 | 0,0664 | 0,0617 | 0,0910 | 0,1144 | 0,0758 |
| 10^3 | 0,0245 | 0,0224 | 0,0304 | 0,0260 | 0,0332 | 0,0132 | 0,0252 | 0,0239 | 0,0315 | 0,0398 | 0,0270 |
| 10^4 | 0,0124 | 0,0109 | 0,0130 | 0,0150 | 0,0128 | 0,0134 | 0,0095 | 0,0100 | 0,0135 | 0,0148 | 0,0125 |
| 10^5 | 0,0046 | 0,0064 | 0,0038 | 0,0048 | 0,0043 | 0,0038 | 0,0060 | 0,0054 | 0,0072 | 0,0041 | 0,0050 |

Ядерна оцінка за законом розподілу Стюдента з об'ємом вибірки $N=100$ і числом ступенів свободи 64

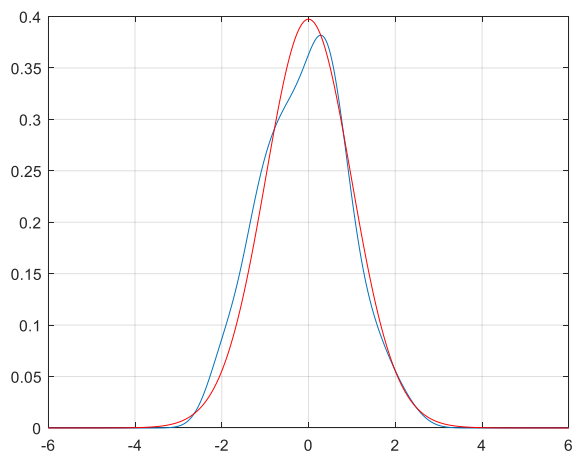


Рис. 3.35

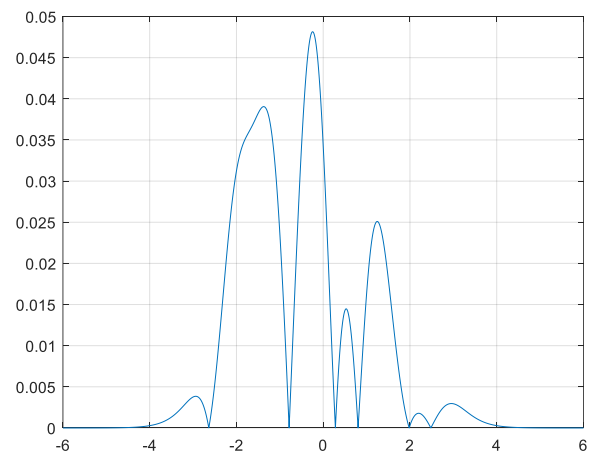


Рис. 3.36

Ядерна оцінка за законом розподілу Стюдента з об'ємом вибірки
 $N=1000$ і числом ступенів свободи 64

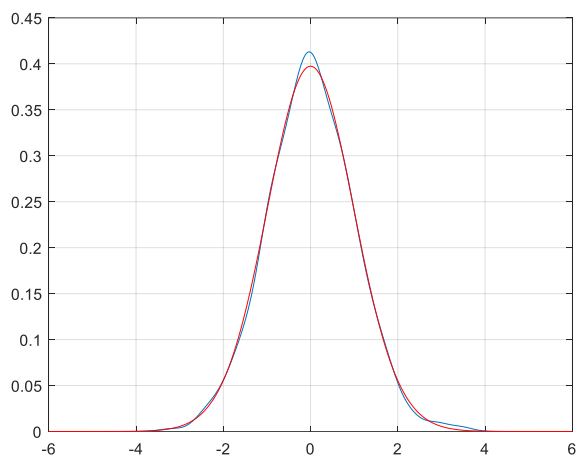


Рис. 3.37

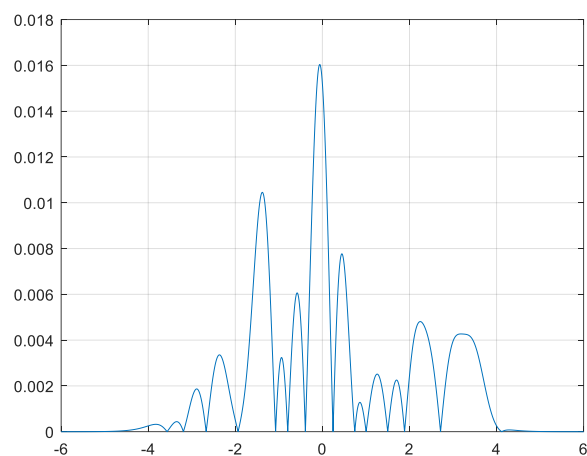


Рис. 3.38

Ядерна оцінка за законом розподілу Стюдента з об'ємом вибірки
 $N=10000$ і числом ступенів свободи 64

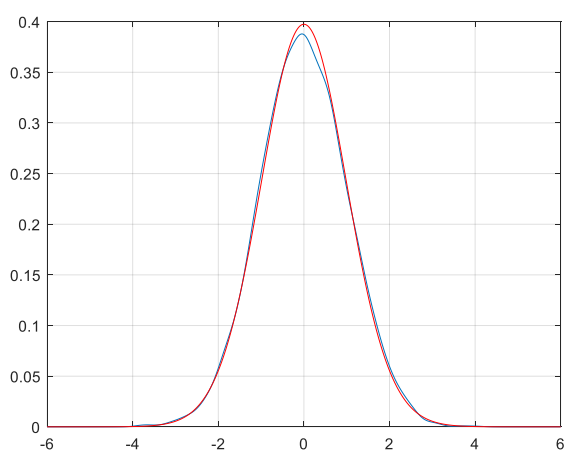


Рис. 3.39

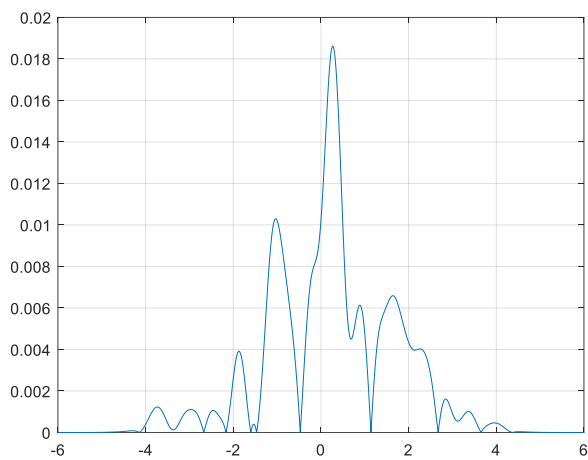


Рис. 3.40

Ядерна оцінка за законом розподілу Стюдента з об'ємом вибірки
 $N=100000$ і числом ступенів свободи 64

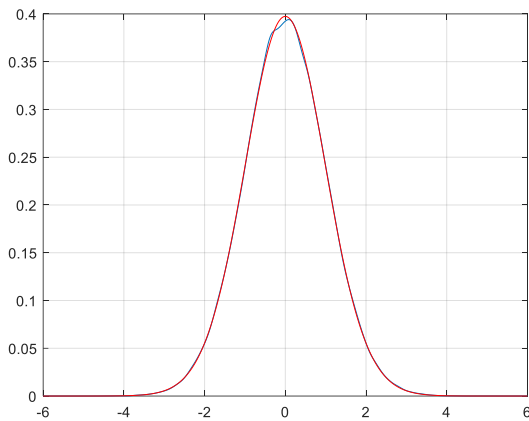


Рис. 3.41

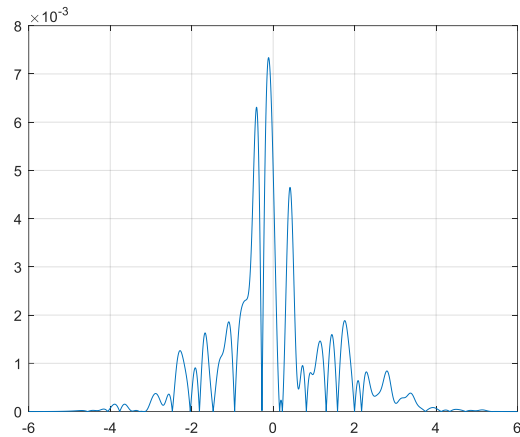


Рис. 3.42

В табл. 3.5 наведено по 10 значень метрик в середньому r_k та їх середнє значення $S = \frac{1}{10} \sum_{k=1}^{10} r_k$.

Таблиця 3.5 Метрика в середньому експериментального і теоретичного значення законом розподілу Стюдента

| N | r_1 | r_2 | r_3 | r_4 | r_5 | r_6 | r_7 | r_8 | r_9 | r_{10} | S |
|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|----------|--------|
| 10^2 | 0,0534 | 0,0396 | 0,1039 | 0,0856 | 0,1283 | 0,0743 | 0,0587 | 0,1099 | 0,0662 | 0,0595 | 0,0779 |
| 10^3 | 0,0129 | 0,0280 | 0,0284 | 0,0369 | 0,0300 | 0,0207 | 0,0352 | 0,0419 | 0,0286 | 0,0229 | 0,0285 |
| 10^4 | 0,0151 | 0,0111 | 0,0068 | 0,0150 | 0,0159 | 0,0100 | 0,0181 | 0,0100 | 0,0089 | 0,0131 | 0,0124 |
| 10^5 | 0,0043 | 0,0035 | 0,0040 | 0,0054 | 0,0049 | 0,0054 | 0,0061 | 0,0039 | 0,0037 | 0,0037 | 0,0045 |

3.3. Ядерна оцінка щільності імовірності за законом розподілу Лапласа

Код для побудови ядерної оцінки щільності імовірності

```

N=100000;
w=2*(binornd(1,0.5,1,N)-0.5).*exp(1,1,N);
sigma=std(w);
xmin=min(w);xmax=max(w);
x=-6:0.001:6;
lambda=1;
p=(lambda/2)*exp(-lambda*abs(x));
jadro=zeros(1,length(x));
h=sigma*N^(-1/5);

for i=1:N,
    z=(x-w(i))/h;

```

```

        jadro=jadro+(1/N/h)*normpdf(z,0,1);
    end;
    plot(x,jadro,x,p,'r');grid

    r=abs(jadro-p);
    plot(x,r);grid

    S=0;
    for j=1:length(x)-1,
        S=S+0.001*(r(j)+r(j+1))/2;
    end;
    S

```

Ядерна оцінка щільності імовірності за розподілом Лапласа з об'ємом вибірки $N=100$

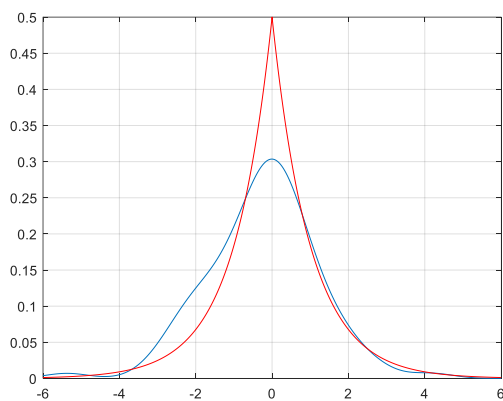


Рис. 3.43

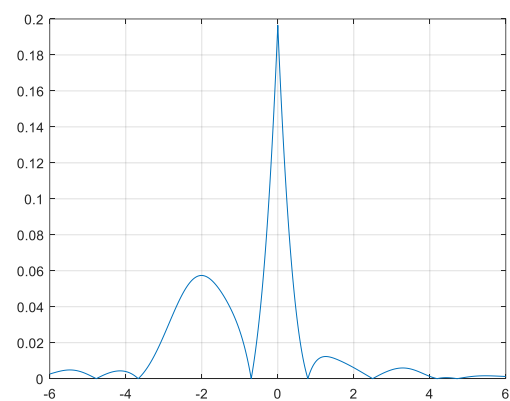


Рис. 3.44

Ядерна оцінка щільності імовірності за розподілом Лапласа з об'ємом вибірки $N=1000$

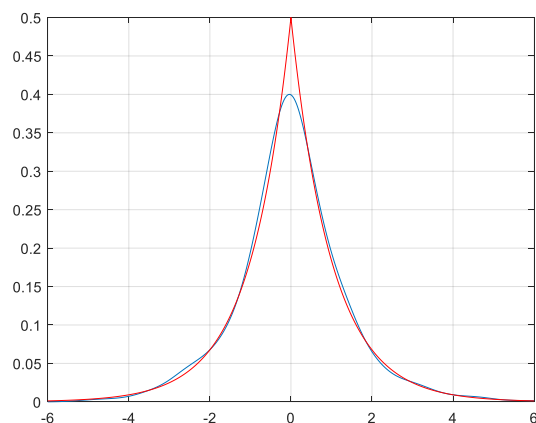


Рис. 3.45

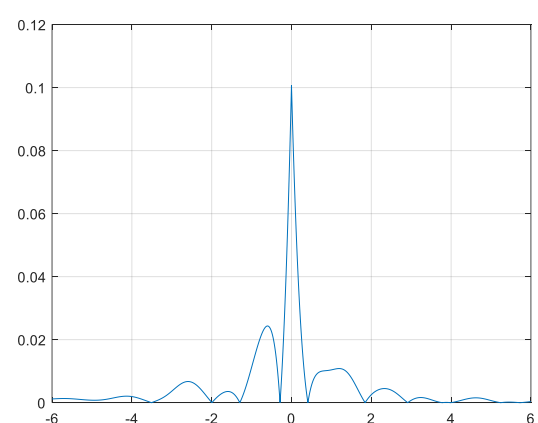


Рис. 3.46

Ядерна оцінка щільності імовірності за розподілом Лапласа з об'ємом вибірки $N=10000$

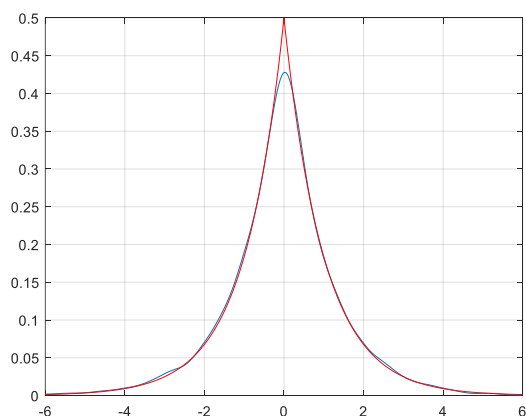


Рис. 3.47

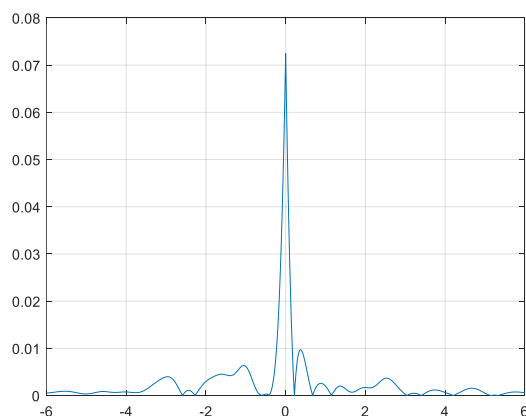


Рис. 3.48

Ядерна оцінка щільності імовірності за розподілом Лапласа з об'ємом вибірки $N=100000$

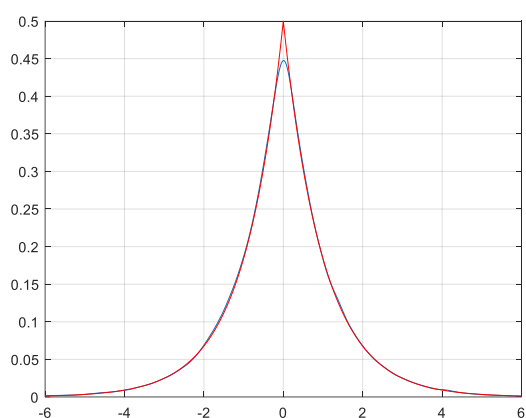


Рис. 3.49

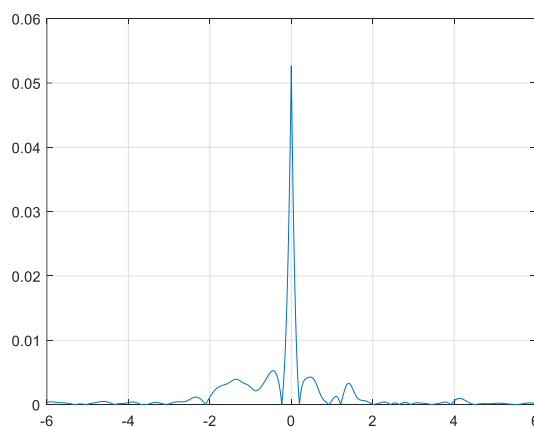


Рис. 3.50

В табл. 3.6 наведено по 10 значень метрик в середньому r_k та їх

середнє значення
$$S = \frac{1}{10} \sum_{k=1}^{10} r_k.$$

Таблиця 3.6 Метрика в середньому експериментального і теоретичного значення законом розподілу Лапласа

| N | r_1 | r_2 | r_3 | r_4 | r_5 | r_6 | r_7 | r_8 | r_9 | r_{10} | S |
|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|----------|--------|
| 10^2 | 0,1196 | 0,0752 | 0,0597 | 0,1051 | 0,0989 | 0,1430 | 0,1241 | 0,1082 | 0,0629 | 0,1425 | 0,1039 |
| 10^3 | 0,0342 | 0,0533 | 0,0401 | 0,0396 | 0,0423 | 0,0420 | 0,0520 | 0,0408 | 0,0440 | 0,0442 | 0,0432 |
| 10^4 | 0,0171 | 0,0267 | 0,0222 | 0,0187 | 0,0222 | 0,0206 | 0,0244 | 0,0212 | 0,0204 | 0,0181 | 0,0212 |
| 10^5 | 0,0095 | 0,0107 | 0,0093 | 0,0098 | 0,0092 | 0,0095 | 0,0098 | 0,0083 | 0,0077 | 0,0089 | 0,0093 |

Для порівняння побудуємо таблицю

Таблиця 3.7

| N | S Нормальний | S Стюдента 7 | S Стюдент 10 | S Стюдент 28 | S Стюдент 64 | S Лапласа |
|--------|-------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------|
| 10^2 | 0,0720 | 0,0658 | 0,1008 | 0,0758 | 0,0779 | 0,1039 |
| 10^3 | 0,0277 | 0,0299 | 0,0264 | 0,0270 | 0,0285 | 0,0432 |
| 10^4 | 0,0117 | 0,0129 | 0,0121 | 0,0125 | 0,0124 | 0,0212 |
| 10^5 | 0,0049 | 0,0053 | 0,0055 | 0,0050 | 0,0045 | 0,0093 |

З отриманих даних можна побачити, що максимально наближеною до теоретичного значення оцінкою являється оцінка за нормальним законом розподілу. Значення за законом розподілу Стюдента наближається до нормального зі збільшенням числа ступенів свободи. З наведених даних видно, що максимальна метрика в середньому (у випадку розподілу Лапласа) для об'єму вибірки 10^5 не перевищує величини 0,01, тобто 1%, що є прийнятним для практики результатом.

Висновки до третього розділу

Як можна побачити з наведених у третьому розділі таблиць зі збільшенням кількості вибірок зменшується площа, отже це свідчить про те, що збільшується точність наближення (помилка апроксимації) експериментального значення до теоретичного.

З наведених даних видно, що максимальна метрика в середньому (у випадку розподілу Лапласа) для об'єму вибірки 10^5 не перевищує величини 0,01, тобто 1%, що є прийнятним для практики результатом.

Висновки по роботі

Існує дуже велика кількість акустичних сигналів, наприклад: акустична емісія, кавітація, акустичні сигнали витoku, вібраційні шуми та ін. Аналіз моделей цих сигналів показав, що щільність імовірності можна знайти лише в окремих випадках. Тому використовуються наближені методи знаходження щільності імовірності, використовуючи різні закони розподілу.

В даний час більшість задача теорії і практики шумової діагностики базуються на гауссівській моделі шумових сигналів і тому вирішені у рамках кореляційно-спектральної теорії. Аналіз багатьох теоретичних і експериментальних досліджень показав, що більшість шумових сигналів являються негауссівськими випадковими процесами. Це обмежує інформативність і застосовність кореляційно-спектральних характеристик.

Для діагностики виникає необхідність застосування негауссівських моделей шумових сигналів. Модель повинна відображати значні сторони досліджуваних фізичних процесів; необхідний добре розроблений апарат дослідження моделі шумового сигналу.

У другому розділі були розглянуті декілька методів оцінки щільності імовірності. Ми обрали ядерне оцінювання, тому що воно не має від'ємних значень, це означає, що комбінація кількох ядер буде не від'ємною. Також це дуже простий метод для знаходження щільності імовірності. Ядерна оцінка

базується на основі гауссівського ядра, бо воно є більш розповсюдженим і найбільш дослідженим ядром.

Максимально наближеною до теоретичного значення оцінкою являється оцінка за нормальним законом розподілу. Значення за законом розподілу Стюдента наближається до нормального зі збільшенням числа ступенів свободи.

Список літератури

1. Качанов Л.М. Основы механики разрушения.— М.:Наука, 1974. — 514с.
2. Дробот Ю.Б., Лазарев А.М. Неразрушающий контроль усталостных трещин акустико-эмиссионным методом. —М.: Изд-во стандартов, 1987. — 128 с.
3. Неразрушающий контроль: Справочник: В 8 т. / Под общ. ред. В.В. Клюева. Т.7: В 2 кн. Кн. 1: В.И. Иванов, И.Э. Власов. Метод акустической эмиссии. Кн. 2: Ф.Я. Балицкий, А.В. Барков, Н.А. Баркова и др. Вибродиагностика. —2-е изд., испр. — М.:Машиностроение, 2006. — 829 с.
4. Буйло С.И. Физико-механические и статистические аспекты повышения достоверности результатов акустико-эмиссионного контроля и диагностики. — Ростов-на-Дону: Изд-во Южн. Федерального ун-та, 2008. 192 с.
5. Перник А.Д. Проблемы кавитации. — Л.: Судостроение, 1966. — 439 с.
6. Миниович И.Я., Перник А.Д. Петровский В.С. Гидродинамические источники звука. — Л.: Судостроение, 1972. — 480 с.7.
7. Левковский Ю.Л. Структура кавитационных течений. — Л.: Судостроение, 1978. — 224 с.
- 8.Сиротюк М.Г. Акустическая кавитация / Отв. ред. В.А. Акуличев, Л.Р. Гаврилов; Тихоокеан. Океанол. ин-т им. В.И. Ильичева ДВО РАН. — М.: Наука, 2008. 271 с.
9. Дробот Ю.Б., Грешников В.А., Бачегов В.Н. Акустическое контактное течеискание. — М.: Машиностроение, 1989. — 120 с.
10. Овчинников А.Л. Особенности распространения сигналов акустической эмиссии утечек в трубопроводах с жидкостью и аппаратура контроля герметичности: автореф. дис. канд. техн. наук: 05.11.13 Овчинников Алексей Львович, Томский политехн. ун-т. — Томск, 2006. — 19 с.
11. Потапов И.А. Акустические методы и средства неразрушающего контроля и дистанционной диагностики трубопроводов: автореф. дис. канд.

тех. наук: 05.02.11 / Иван Анатолевич Потапов; Северо-Западный государственный заочный технический университет. СПб., 2007. – 24 с.

12. Шубов Л.Г. Шум и вибрация электрических машин. Л.: Энергоатомиздат. Ленингр. отд-ние, 1986. – 208 с.

13. Марченко Б.Г. Вибродиагностика подшипниковых узлов электрических машин. – К.: Наук. думка, 1992. – 196 с.

14. Баранов В.М. Акустическая эмиссия при трении. – М.: Энергоатомиздат, 1998. 256 с.

15. Гихман И.И. Скороход А.В. Введение в теорию случайных процессов. – М.: Наука, 1977. – 567 с.

16. Бабак В.П. Марченко Б.Г. Фриз М.Є. Теорія ймовірностей, випадкові процеси та математична статистика: Підручн. – К.: Техніка, 2004. – 288 с.

17. Левин Б.Р. Шварц В. Вероятностные модели и методы в системах связи и управления. – М.: Радио и связь, 1985. – 312 с.

18. Пугачев В.С. Синицын И.Н. Стохастические дифференциальные системы. – М.: Наука, – 1985. – 560 с.

19. Марченко Б.Г. Мыслович М.В. Белые шумы в колебательных системах. – К., 1989. – 42 с. – (Препринт / АН УССР, Ин-т электродинамики, №599).

20. Бунимович В.И. Флуктуационные процессы в радиоприемных устройствах. – М.: Сов. радио, 1951. – 360 с.

21. Rice S.O. Mathematical analysis of random noise // Bell Syst. Techn. Journ. – 1944. – 23(3). – P. 282-332; 1945 – 24(1). – P.282–332.

22. Красильников А.И., Горовецкая Т.А. Каноническое представление характеристической функции импульсного случайного процесса // Вестн. Киев. политехн. ин-та. Электроакустика и звукотехника. – 1984. – Вып.8. – С. 34–37.

23. Інформаційне забезпечення моніторингу об'єктів теплоенергетики: Монографія / В.П. Бабак, С.В. Бабак, В.С. Берегун та ін.; за ред. чл.-кор. НАН України В.П. Бабака / – К., 2015. – 512 с.
24. Берегун В.С., Красильников А.И. Аппроксимация плотности вероятности отрезками по ортогональным полиномам. – К.: Освіта України, 2019. – 190 с.
25. Зачепацкая Л.П. Пуассоновские случайные процессы. Особенности простых и сложных процессов: Учеб. пособие. – Горький: Горьк. гос. ун-т, 1982. – 109 с.
26. Малахов А.Н. Кумулянтный анализ случайных негауссовых процессов и их преобразований. – М.: Сов. радио, 1978. – 376 с.
27. Тихонов В.И. Статистическая радиотехника. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Радио и связь, 1982. – 624 с.
28. Вадзинский Р.Н. Справочник по вероятностным распределениям. СПб.: Наука, 2001. – 295 с.
29. Прикладной анализ случайных процессов / Под ред. С.А. Прохорова. – Самара: СНЦ РАН, 2007. 582 с.
30. Митропольский А.К. Техника статистических вычислений. – М.: Гос. изд-во физ.-мат лит-ры, 1961. – 480 с.
31. Марченко В.Б. Ортогональные функции дискретного аргумента и их применение в геофизике. – К.: Наук. думка, 1992. – 210 с.
32. Лукач Е. Характеристические функции: Пер. с англ. – М.: Наука, 1979. – 424 с.
33. Королев В.Ю. Смешанные гауссовские вероятности модели реальных процессов. – М.: Макс Пресс, 2004. – 124 с.
34. Красильников А.И., Пилипенко К.П. Применение двухкомпонентной гауссовской смеси для идентификации одновершинных симметричных плотностей вероятностей // Электроника и связь. – 2008. - №5 (46). – С. 20-29.

35. Крамер Г. Математические методы статистики / Пер. с англ. А.С. Мониной, А.А. Петрова; Под ред. А.Н. Колмогорова. – М.: Мир, 1975. – 648 с.
36. Берегун В.С., Красильников О.І. Особливості використання поліномів Ерміта для ортогональних подань щільності імовірності // Електроніка и связь. – 2010. -№3 (56). – С. 73-78.
37. Берегун В.С., Красильников О.І. Дослідження областей невід’ємності ортогональних подань щільності імовірності // Електроніка и связь. – 2010. – №3 (56). – С. 73-78.
38. Шалыгин А.С. Палагин Ю.И. Прикладные методы статистического моделирования. – Л.: Машиностроение, 1986. – 320 с.
39. Айвазян С.А., Енюков И.С., Мешалкин Л.Д. Прикладная статистика: Основы моделирования и первичная обработка данных. Справочное изд. – М.: Финансы и статистика, 1983. 471 с.
40. Бендат Дж., Пирсол А. Прикладной анализ случайных данных: Пер.с англ. В.Е. Привальского и А.И. Кочубинского; под ред. И.Н. Коваленко. – М.: Мир, 1989. – 540 с.
41. Кобзарь А.И. Прикладная математическая статистика. Для инженеров и научных работников. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 1986. – 320 с.
42. Статистический анализ данных, моделирование и исследование вероятностных закономерностей. Компьютерный подход / Б.Ю. Лемешко, С.Б. Лемешко, С.Н. Постовалов, Е.В. Чимитова. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2011. – 888 с.
43. Деврой Л., Дьёрфи Л. Непараметрическое оценивание плотности. L_1 -подход: Пер. С англ. А.Б. Цыбакова; под ред. М.Б. Малютова. - М.: Мир, 1988 – 407 с.